例5（理第20题）在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{3}$，且椭圆$C$上的点到$Q(0,2)$的距离的最大值为3.

（1）求椭圆C的方程；

（2）在椭圆C上，是否存在点$M(m,n)$使得直线l：$mx+ny=1$与圆O:$x^2+y^2=1$相交于不同的两点A，B，且$\triangle OAB$的面积最大？若存在，求出点M的坐标及相对应的$\triangle OAB$的面积；若不存在，请说明理由.

解析（1）由于离心率$e=\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\Rightarrow a^2=3b^2$，于是椭圆方程为$x^2+3y^2=3b^2$.

设椭圆上任意一点为$P(x_0,y_0)$，

则$|PQ|=\sqrt{x_0^2+(y_0-2)^2}=\sqrt{3b^2-3y_0^2+(y_0-2)^2}=\sqrt{-2(y_0+1)^2+6+3b^2}$.

① 若$b<1$，则当$y_0=-b$时，$|PQ|_{max}=\sqrt{(b-2)^2}=3\Rightarrow b=1$，不合题意，舍去.

② 若$b\geqslant1$，则当$y_0=-1$时，$|PQ|_{max}=\sqrt{6+3b^2}=3\Rightarrow b^2=1$.

故椭圆C的方程为$x^2+3y^2=3$.

（2）法一：假若M存在，设圆心到直线l:$mx+ny=1$的距离为d，

则$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}d\cdot AB=\frac{1}{2}d\cdot2\sqrt{1-d^2}\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当$d=\sqrt{1-d^2}\Rightarrow d=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，此时$d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$即$\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m^2+n^2=2$……①

又点$M(m,n)$在椭圆C上，得$m^2+3n^2=3$……②

由①②得$\begin{cases}m^2=\frac{3}{2},\\ n^2=\frac{1}{2},\end{cases}$即$M$点有四个其坐标分别为$(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

法二：由$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB\leqslant\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}$，此时，$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$即$\triangle AOB$为等腰直角三角形，又由$OA=OB=1$得圆到直线$AB$距离为$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，回到法一即可.

评析看看解题过程，你有没有“凡中见活”的感觉，第一问，可以得分，但你能保证得满分吗？分类讨论隐藏得很深，是一个不大不小的“陷阱”.第二问，在题意的理解上有点小难度，如果你想画图，看看情况，也许就产生不了结论了.实际上，是方程思想的灵活应用，只要你抓住m,n，从列、解关于m,n的方程出发，可能什么问题都没有了.

5. 落笔分类讨论

运算是广东考生的“软肋”，字母运算更是“软肋”中最为脆弱的部位.本次命题的压轴题就是直击“命脉”进行设计，将字母运算、分类讨论等融为一体.

例6设$a<1$，集合$A=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

(1)求集合D(用区间表示)；

(2)求函数$f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$在D内的极值点.

解析一(1)(从二次不等式入手)由于$\triangle=9(1+a)^2-48a$及$a<1$，

(i)若$\triangle<0$即$\frac{1}{3}<a<1$，此时，$B=\mathbf{R}$，从而$D=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$；

(ii)若$\triangle=0$即$a=\frac{1}{3}$，此时，$B=\{x|x\neq1\}$，从而$D=\{x|x>0且x\neq\frac{1}{2}\}$；

(iii)若$\triangle>0$即$a<\frac{1}{3}$，此时，$B=\{x|x<\frac{3(a+1)-\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}$或$x>\frac{3(a+1)+\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}\}$；由于$0<a<\frac{1}{3}$时，$\frac{3(a+1)-\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}>0$；$a\leqslant0$时，$\frac{3(a+1)-\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}\leqslant0$；于是：

当$0<a<\frac{1}{3}$时，$D=\{x|0<x<\frac{3(a+1)-\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}$或$x>\frac{3(a+1)+\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}\}$；

当$a\leqslant0$时，$D=\{x|x>\frac{3(a+1)+\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}\}$.

综上得：当$\frac{1}{3}<a<1$时，$d=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$；当$0<a\leqslant\frac{1}{3}$时，$D=\{x|0<x<\frac{3(a+1)-\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}$或$x>\frac{3(a+1)+\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}\}$；$a\leqslant0$时，$D=\{x|x>\frac{3(a+1)+\sqrt{9(a+1)^2-48a}}{4}\}$.

解析二(1)(从二次函数入手)设$g(x)=2x^2-3(1+a)x+6a$，则$g(0)=6a$.

(i)若$a\leqslant0$，则$g(0)\leqslant0$，此时函数$g(x)$与x轴的交点