

让考生找到“回家的路”

——对一道高考题的深度分析与研究

■ 林 生

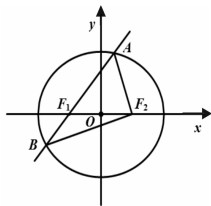
历年来解析几何问题是高考重头戏,其本质是利用代数的方法研究几何问题,但在利用代数方法求解的过程中,往往会出现“过程冗长、运算繁琐”而令我们“望而生畏、不战而退”.那如何让考生找到“回家的路”——解题之“道”.本文笔者结合 2012 年福建理科高考第 19 题的解法进行研究,通过该题让我们一起去寻“道”探路.

一、真题回放

如图,椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F_1 ,右焦点为 F_2 ,离心率 $e = \frac{1}{2}$.过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点,且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设动直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P ,且与直线 $x = 4$ 相交于点 Q .试探究:在坐标平面内是否存在定点 M ,使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M ? 若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,说明理由.



【点评】 该题虽涉及的知识点多、能力要求高,且入口宽,解法多,但却较好地考查了解析几何的核心本质.第(1)问只需结合椭圆定义和其几何性质就可以解决;第(2)以“直线与圆锥曲线的位置关系”为载体,通过“动圆是否过定点”设置探究性问题,充分考查椭圆和圆的有关性质、直线与圆锥曲线的位置关系等基础知识;考查运算求解能力、推理论证能力;考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想,是一道不可多得的好题.

二、解题分析

1. 明确“去路”,整装待发

第(1)问根据椭圆的定义易得 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$,从而得到 a 的值;再由 $e = \frac{1}{2}$ 可得到椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (过程略).第(2)问是探索性问题,解决这类问题一般有以下思路:一是先假设满足条件的点 M 存在,再根据点 M 满足的条件列出相应的关系

式,再化简、求解相应的关系式.如果可求出来,则点 M 存在;反之,点 M 不存在.二是利用特殊与一般思想,先利用某些特殊条件寻找“可能的点 M ”,再验证这些“可能的点 M ”对一般情况是否满足,如果满足,说明点 M 存在;否则,点 M 不存在.通过在方法上明确“去路”,我们解题就能迎难而上.

2. 放手“探路”,锻炼能力

由(1)中的“去路”可“探路”: (一) 假设满

足条件的定点 M 存在,设为 $M(x_1, y_1)$ 再由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$

得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$,再利用 $\Delta = 4k^2 - m^2 + 3 = 0 \dots$

(1),即找到 m, k 的关系,之后利用点 M 的坐标满足以 PQ 为直径的圆的方程或 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$,得到关于 x_1, y_1 及 m, k 的关系式,再结合(1)中 m, k 的关系可得到关于 x_1, y_1 的方程组,通过解方程组可判断点 M 的存在性.但该方法运算量大且不易得到答案,因此需再次“探路”:

(二) 根据图形的对称性知,点 M 必在 x 轴上,即可设 $M(x_1, 0)$,利用点 M 的坐标满足以 PQ 为直径的圆的方程或 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$,得到关于 x_1 及 m, k 的关系式,再根据

$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得到条件 ($\Delta = 4k^2 - m^2 + 3 = 0$) 中的 m, k 关系,

最终可得关于 x_1 的方程组,通过解方程组判断点 M 的存在性.通过这样大大减少运算量.(附详细解法:由

$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$. 由动直线 l

与椭圆 E 有且只有一个公共点,设 $P(x_0, y_0)$, 得 $64k^2m^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0$,化简得 $4k^2 - m^2 + 3 = 0 \dots \textcircled{1}$,由 P 点在椭圆上得: $x_0 = -\frac{4km}{4k^2 + 3} = -\frac{4k}{m}$, $y_0 = kx_0 + m = \frac{3}{m}$, 所以 $P(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m})$.

再由 $\begin{cases} x = 4, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 得 $Q(4, 4k + m)$. 假设满足条件的定点 M 存在,由图形对称性知,点 M 必在 x 轴上.

设 $M(x_1, 0)$, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$, 对满足 $\textcircled{1}$ 式的 m, k 恒成立.

因为 $\overrightarrow{MP} = (-\frac{4k}{m} - x_1, \frac{3}{m})$, $\overrightarrow{MQ} = (4 - x_1, 4k + m)$, 由 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$, 得 $-\frac{16k}{m} + \frac{4kx_1}{m} - 4x_1 + x_1^2 + \frac{12k}{m} + 3 = 0$, 整理得