$(4x_1-4)\frac{k}{m}+x_1^2-4x_1+3=0\cdots$②

由①②可得$\begin{cases}4x_1-4=0,\\x_1^2-4x_1+3=0,\end{cases}$解得 $x_1=1$，故存在定点$M(1,0)$，使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M.

【点评】此解法抓住了“关键”—图形的对称性(点 M 必在 x 轴上),这样就减少了一个变量,避免了复杂的运算,收到事半功倍的效果.

3. 寻找“近路”,少走“弯路”

由以上的解法可知：上述解法的运算量还比较大，我们可从“去路”的思路二出发，从特殊到一般，把 m,k 特殊化，要把 m,k 特殊化的数据很多，那到底找哪些好？找三组，两组，一组？这时需要认真分析条件，通过分析发现都可以，这样就可以形成三种不同的解题思路.但怎么样才可以少走“弯路”到达“近路”呢？显然，数据越简单越好. 能够取到最特殊就最好（即直线斜率为 0 且过椭圆上顶点（0，$\sqrt{3}$）)，根据图形的对称性知，若满足条件的定点 M 存在，点 M 必在 x 轴上.因此，取一组特殊的 m,k 值，得到一组特殊点 P_1，Q_1，写出以 P_1Q_1 为直径的圆的方程.如果这个圆与 x 轴没有公共点,则满足条件的点 M 不存在;否则,求出其公共点 M_1.验证对于满足$\triangle=4k^2-m^2+3=0$,以 PQ 为直径的圆是否恒经过点 M_1,若是,点 M_1 就是所求的满足条件的点 M;否则,满足条件的点 M 不存在. (附解法:联立方程可得 $P(-\frac{4k}{m},\frac{3}{m})$,$Q(4,4k+m)$(过程略,与上解法相同). 假设满足条件的定点 M 存在,由图形对称性知,点 M 必在 x 轴上.取 $k=0,m=\sqrt{3}$,此时 $P(0,\sqrt{3})$,$Q(4,\sqrt{3})$,以 PQ 为直径的圆为$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$,交 x 轴于点 $M_1(1,0)$,$M_2(3,0)$;取 $k=-\frac{1}{2}$,$m=2$,此时 $P(1,\frac{3}{2})$,$Q(4,0)$,以 PQ 为直径的圆为$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{4})^2=\frac{45}{16}$,交 x 轴于点 $M_3(1,0)$,$M_4(4,0)$. 所以若符合条件的点 M 存在,则 M 的坐标必为$(1,0)$. 证明 $M(1,0)$就是满足条件的点:因为 M 的坐标为$(1,0)$,所以$\overrightarrow{MP}=(-\frac{4k}{m}-1,\frac{3}{m})$，$\overrightarrow{MQ}=(3,4k+m)$，从而$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\frac{12k}{m}-3+\frac{12k}{m}+3=0$ 恒成立，故有$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$，即存在定点 $M(1,0)$,使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M.)

【点评】通过以上解法的分析，“探路”中的解法计算量大，后者提供的解法运算量最小！其关键在于把特殊化，并且是考虑最特殊情况（$k=0$，$m=\sqrt{3}$），这样就把问题简单化了.从中可看出：要找到解析几何之“路”，就要紧扣目标，尽可能把题设条件全部融入图形中，实现文字语言、符号语言、图形语言之间的相互转化；同时善于挖掘几何曲线的代数含义和几何特征，灵活运用化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想对问题进行转化，回避一些繁杂的运算，以上高考题便是一个很好的例子.

4. 开创“新路”，拓展推广

由以上解题分析和结论可发现:直线 $x=4$ 刚好是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的一条准线,点 $M(1,0)$恰好是椭圆对应于此准线的焦点,这是必然还是巧合?我们能否开创“新路”?对此进行拓展推广?通过探究可得命题 1:设动直线 $y=kx+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$有且只有一个公共点 P,且与其准线 $x=\frac{a^2}{c}$相交于点 Q,那么以 PQ 为直径的圆恒过与此准线对应的焦点 $F(c,0)$(限于篇幅,同学们可以用以上同样的方法来证明). 该命题对于椭圆成立，那么是否对于双曲线和抛物线也有相应的结论呢?通过探究其结论也成立,所以又有以下结论:①命题 2:设动直线 $y=kx+m$ 与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$有且只有一个公共点 P,且与其准线 $x=\frac{a^2}{c}$相交于点 Q,那么，以 PQ 为直径的圆恒过与此准线对应的焦点 $F(c,0)$.②命题 3:设动直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y^2=2px$ 相切于点 P,且与准线 $x=-\frac{P}{2}$相交于点 Q,那么,以 PQ 为直径的圆恒过抛物线的焦点 $F(\frac{P}{2},0)$.(留给同学们证明,提示:可以用以上相同的方法证明命题 2 和 3)

通过对这道高考题的深度分析，我们学会了找到“回家的路”——充分利用代数方法解决解析几何问题，深入挖掘其隐含条件来解题才是最佳的解题之路.

三、小试牛刀

1. 以 $F_1(0,-1)$,$F_2(0,1)$,为焦点的椭圆 C 过点 $P(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.(1)求椭圆 C 的方程;(2)过点 $S(-\frac{1}{3},0)$的动直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点,试问:在直角坐标系平面内是否存在一个定点 T，使得无论直线 l 如何转动，以 AB 为直径的圆恒过点 T,若存在,求出点 T 的坐标;若不存在,则说明理由.

参考答案：（1）$x^2+\frac{y^2}{2}=1$；（2）存在一个定点 $T(1,0)$，以 AB 为直径的圆恒过点 T.

(作者单位：信宜市信宜中学)

责任编校　徐国坚