

数学有数

满足的条件列出有关的不等式(组),并求出它的公共解集.这类题目都比较常规,相对容易.

(1) 2012年试题

2012文11 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为_____.

【答案】 $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

(2) 近年试题

2010文2 函数 $f(x) = \lg(x-1)$ 的定义域是()

A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

【答案】 B

2010理9 函数 $f(x) = \lg(x-2)$ 的定义域是_____.

【答案】 $\{x \mid x > 2\}$

2011文4 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \lg(1+x)$ 的定义域是()

A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

【答案】 C

[点评] 把握函数定义域的要求,正确列出不等式(组),求出公共解集.

(3) 实践练习

函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域为()

A. $[-2, 0) \cup (0, 2]$ B. $(-1, 0) \cup (0, 2]$

C. $[-2, 2]$ D. $(-1, 2]$

【答案】 B

3. 解不等式

在考试说明中文理科考生共同要求为:①会从实际情境中抽象出一元二次不等式模型;②通过函数图像了解一元二次不等式与相应的二次函数、一元二次方程的联系;③会解一元二次不等式,对给定的一元二次不等式,会设计求解的程序框图.

而理科考生在不等式选讲中还要求会利用绝对值的几何意义求解① $|ax+b| \leq c$, ② $|ax+b| \geq c$, ③ $|x-c| + |x-b| \geq a$ 类型的不等式.

当在求解含参数的一元二次不等式时,准确把握对参数的分类讨论是破解之道.

(1) 2012年试题

2012理9 不等式 $|x+2| - |x| \leq 1$ 的解集为

【答案】  $\{x \mid x \leq -\frac{1}{2}\}$

[点评] 熟练利用绝对值的几何意义求解绝对值不等式,属基础题.可三步得解,即一画(画出数轴与使绝对值为零的点)二等(不等式变为等式,利用绝对值的几何意义,找出方程的解)三求(利用绝对值的几何意义,求出满足不等式的解集).本题应避免采用分类讨论法来求解集,因为费时费力.

2012文21 设 $0 < a < 1$, 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3(1+a)x + 6a > 0\}$, $D = A \cap B$. (1) 求集合 D (用区间表示); (2) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax$ 在 D 内的极值点.

【解析】 (1) 令 $g(x) = 2x^2 - 3(1+a)x + 6a$, 对称轴方程为: $x = \frac{3}{4}(1+a)$. $\Delta = 3(3a-1)(a-3)$.

① 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, $\Delta \geq 0$, $x = \frac{3}{4}(1+a) > 0$, $g(0) = 6a > 0$. 故方程 $g(x) = 0$ 的两根分别为 $x_1 = \frac{3a+3-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}$, $x_2 =$

$\frac{3a+3+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}$. 且 $0 < x_1 < x_2$, 此时, $D = A \cap B = (0, \frac{3a+3-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}) \cup (\frac{3a+3+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}, +\infty)$.

② 当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时, $\Delta < 0$, $g(x) > 0$ 恒成立. 故 $D = A \cap B = (0, +\infty)$.

综上所述, 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, $D = A \cap B = (0, \frac{3a+3-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}) \cup (\frac{3a+3+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}, +\infty)$;

当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时, $D = A \cap B = (0, +\infty)$.

(2) $f'(x) = 6x^2 - 6(1+a)x + 6a = 6(x-a)(x-1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x=1$ 或 $x=a$.

① 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, 由(1)知 $D = (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, 因 $g(a) > 0$, $g(1) \leq 0$, 故 $0 < a < x_1 < 1 \leq x_2$. $f'(x)$ 与 $f(x)$ 随 x 变化情况:

x	$(0, a)$	a	(a, x_1)	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	↗

故 $f(x)$ 的极大值点为 $x=a$, 没有极小值点.

② 当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时, 由(1)知 $D = (0, +\infty)$. $f'(x)$ 与 $f(x)$ 随 x 变化情况:

x	$(0, a)$	a	$(a, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故 $f(x)$ 的极大值点为 $x=a$, 极小值点为 $x=1$.

综上所述, 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 的极大值点为 $x=a$, 没有极小值点; 当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时, $f(x)$ 的极大值点为 $x=a$,