（2）近年试题

2011 文 20 设 $b>0$，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=b, a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}(n\geqslant 2)$.

1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：对于一切正整数 n，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$.

【解析】本题第 1 问是数列内容，求出 $a_n=\begin{cases}1,(b=1)\\ \frac{nb^n(1-b)}{1-b^n}.(b>0,b\neq 1)\end{cases}$ 第(2)小问的证明如下：当 $b=1$ 时，$2\leqslant 2$ 成立；当 $b>0$ 且 $b\neq 1$ 时，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$ $\Leftrightarrow \frac{2nb^n(1-b)}{1+b^n}\leqslant b^{n+1}+1\Leftrightarrow \frac{2n(1-b)}{1-b^n}\leqslant\left(b+\frac{1}{b^n}\right)\Leftrightarrow$ $\frac{2n}{1+b+\cdots+b^{n-1}}\leqslant\left(b+\frac{1}{b^n}\right)\Leftrightarrow\left(b+\frac{1}{b^n}\right)(1+b+\cdots+b^{n-1})\geqslant 2n\Leftrightarrow$ $(b+b^2+\cdots+b^n)+(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b})\geqslant 2n\Leftrightarrow\left(b+\frac{1}{b}\right)+$ $\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)+\cdots+\left(b^n+\frac{1}{b^n}\right)\geqslant 2n$.

由于 $b>0$ 且 $b\neq 1$，所以$\left(b+\frac{1}{b}\right)>2$，$\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)>2$，$\cdots$，$\left(b^n+\frac{1}{b^n}\right)>2$ 成立，故上式成立，综上所述，对于一切正整数 n，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$.

[点评] 本题第 2 问考查转化、推理论证及运算三大能力，综合性强，对文科考生来说难度较大.

对于 2011 理 20 第 2 问的解答稍有不同，其 $a_n=\begin{cases}2,\quad(b=1)\\ \frac{nb^n(2-b)}{2-b^n},(b>0,\ b\neq 2)\end{cases}$ 后面推理论证过程大致相近,直至推到要证下式成立:$\left(\frac{b}{2^2}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{b^2}{2^3}+\frac{2}{b^2}\right)+\cdots+$ $\left(\frac{b^n}{2^{n+1}}+\frac{2^{n-1}}{b^n}\right)\geqslant n$.

由于 $b>0$ 且 $b\neq 2$，所以$\left(\frac{b}{2^2}+\frac{1}{b}\right)>1$，$\left(\frac{b^2}{2^3}+\frac{2}{b^2}\right)>1$，$\cdots$，$\left(\frac{b^n}{2^{n+1}}+\frac{2^{n-1}}{b^n}\right)>1$ 成立，故上式成立，综上所述，对于一切正整数 n，$a_n\leqslant\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

（3）实践练习

设 $n>1$，$n\in\mathbf{N}$,求证：$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{8}{(n+1)(n+2)}$.

【解析】本题注意到:$\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{2}+C_n^2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{2^n}\geqslant 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}=\frac{(n+1)(n+2)+6}{8}$ $>\frac{(n+1)(n+2)}{8}$,故$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{8}{(n+1)(n+2)}$.

二、2013 年广东高考数学不等式命题趋势

与近年相比，不等式在 2012 年高考数学中的特点为：着眼课本，注重基础；文理有别，考查能力；走向常规，返璞归真.从命题趋势来看，估计 2013 年将保持“九稳一变”.具体注意以下几方面：

1. 体现不等式基本能力的内容一定会有.如用不等式求函数定义域、解简单的一元二次不等式、绝对值不等式这些着眼课本，注重基础的内容；

2. 体现不等式中等能力的内容应该还有.如简单的线性规划应用问题，不等式的证明，含参数不等式成立问题等.

3. 体现不等式较高能力的内容不能缺少.不等式将不断寻求与新的知识组合，如：不等式与函数的组合（2010 年文 21）；不等式与解几的组合（2011 年文 21 理 21）；不等式与数列组合（2012 年理 19），与集合、导数的组合（2012 年文 21 理 21）.2013 年不等式将会与谁来组合？当然还可以与向量、解三角形等相结合，或再现往年情景.由于不等式常常用作压轴题，故应特别注意它与其它知识的交汇与渗透.

4. 淡出、淡化的内容不落重笔.如解复杂的无理不等式、高次不等式等内容，不多费时耗力.

三、2013 年高考数学不等式复习建议

针对 2013 年高考数学不等式的复习，建议做好以下几点：

（一）依纲靠本，全面复习；狠抓基础，突破重点.

1. 依纲靠本，全面复习.

首先熟悉 2012 年《广东省高考数学考试大纲的说明》，注意文理有别，复习敬遵考纲.高三第一轮不等式的复习中全面落实以下内容：

（1）不等关系；

（2）一元二次不等式；

（3）二元一次不等式（组）与简单线性规划问题；

（4）基本不等式：$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\geqslant 0$）.

若是理科考生还需包括以下指定选考内容：

（1）理解绝对值的几何意义，并能利用含绝对值不等式的几何意义证明以下不等式.

① $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；② $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

（2）会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式

① $|ax+b|\leqslant c$；② $|ax+b|\geqslant c$；③ $|x-c|+|x-b|\geqslant a$.

（3）会用（1）中不等式①和②证明一些简单问题.能够利用平均值不等式求一些特定函数的极值.

（4）了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法和放缩法.