在区间 I 上恒成立，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致，(1)设 $a>0$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间$[-1,+\infty)$上单调性一致，求实数 b 的取值范围.

解析： $f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2x+b$. 由题意知 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，即 $(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$ 在区间$[-1,+\infty)$上恒成立.因为 $a>0$，所以 $3x^2+a>0$，所以只需 $2x+b\geqslant 0$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上恒成立.通过参数分离得 $b\geqslant -2x$，即 $b\geqslant(-2x)_{max}$，从而得 $b\geqslant 2$.

点评： 本题是有关恒成立，确定参数取值的问题，若能把参数分离出来，就可将不等式恒成立问题转化为求函数最值问题的一种处理方法，其一般类型有：

(1) $f(x)>a$ 恒成立$\Leftrightarrow a<f(x)_{min}$;

(2) $f(x)<a$ 恒成立$\Leftrightarrow a>f(x)_{max}$.

三、利用反面法求参数取值范围

例 3. 设函数 $f(x)=x^2-(a+2)x+a\ln x$,其中常数 $a\in$ R.若函数 $f(x)$在$[2,+\infty)$上为增函数,求 a 的取值范围.

解析： 函数 $f(x)$在$[2,+\infty)$上为增函数$\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0$ 在$[2,+\infty)$ 上恒成立，$f'(x)=2x-(a+2)+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}\geqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$ 在$[2,+\infty)$上恒成立$\Leftrightarrow g(x)=2x^2-(a+2)x+a\geqslant 0$ 在$[2,+\infty)$上恒成立.

P: $\forall x\in[2,+\infty)$都有 $g(x)=2x^2-(a+2)x+a\geqslant 0$,

$\neg P$：$\exists x\in[2,+\infty)$有 $g(x)=2x^2-(a+2)x+a<0$.

$\because g(x)=2x^2-(a+2)x+a<0=2(x-\frac{a}{2})(x-1)<0$,

$\therefore a>4$,所以原命题 a 的取值范围为 $a\leqslant 4$.

点评： 在求参数的取值范围时，先求出原命题的否命题中参数的取值范围，再求原命题中参数的取值范围.当命题出现“至多”“至少”或直接从正面人手难以寻觅解题的突破口时，宜考虑利用反面求解法.

四、利用函数的单调性求参数取值范围

函数 $f(x)$在区间 D 上是减函数$\Leftrightarrow f(x)$的图像在区间 D 上是下降的$\Leftrightarrow$在区间 D 上自变量增大函数值减小.类似地，函数 $f(x)$在区间 D 上是增函数$\Leftrightarrow f(x)$的图像在区间 D 上是上升的$\Leftrightarrow$在区间 D 上自变量增大函数值也增大.

例 4. 已知函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+4x$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-2, 1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

解析： 函数 $f(x)$是奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=4x-x^2$，

由 $f(x)$的图像可知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调递增函数，

由 $f(2-a^2)>f(a)$得 $2-a^2>a$，即 $a^2+a-2<0$，解得$-2<a<1$.

点评： 对于 $f(2-a^2)>f(a)$，求 a 的取值范围，一般解法是利用函数单调性脱去“f”.也就是说，解决抽象函数函数问题关键是利用函数的单调性去掉函数符号.

五、利用变换主元法求参数取值范围

处理含参不等式恒成立的某些问题时，若能适时的把主元变量和参数变量进行“换位”思考，往往会使问题降次、简化.

例 5. 若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对$|m|\leqslant 2$ 的所有实数都成立，求 x 的取值范围.

解析： 不等式变为 $m(x^2-1)-(2x-1)<0$，即 $f(m)=m(x^2-1)-(2x-1)<0$ 在 $\{m\mid -2\leqslant m\leqslant 2\}$ 上恒成立，故 $\begin{cases}f(2)<0,\\ f(-2)<0,\end{cases}$ 解得 $\frac{\sqrt{7}-1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，即 x 的取值范围是$(\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2})$.

点评： 题中的不等式是关于的一元二次不等式，但若把 m 看成主元，则问题可转化为一次不等式 $m(x^2-1)-(2x-1)<0$ 在 $m\in[-2,2]$上恒成立的问题.考生不会进行变量转化是导致本题无法求解的重要原因.一般地，知道谁的范围，谁就是变量，求谁的范围，谁就是参数.

六、利用数形结合法求参数取值范围

数学家华罗庚曾说过：“数缺形时少直观，形缺数时难入微”，这充分说明了数形结合思想的妙处，在函数存在零点问题或不等式恒成立问题中它同样起着重要作用.我们知道，函数图像和等式或不等式有着密切的联系：

(1) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow$函数 $f(x)$图像与函数 $g(x)$图像有交点；

(2) $f(x)>g(x)\Leftrightarrow$函数 $f(x)$图像恒在函数 $g(x)$图像上方；

(3) $f(x)<g(x)\Leftrightarrow$函数 $f(x)$图像恒在函数 $g(x)$图像下方.

例 6. 设函数 $f(x)=x^2-(a+2)x+a\ln x$，其中常数 $a\in$ R，当 $a=4$ 时，若函数 $y=f(x)-m$ 有三个不同的零点，求 m 的取值范围.