

解析: 当 $a=4$ 时, $f'(x)=2x+\frac{4}{x}-6=\frac{2x^2-6x+4}{x}=\frac{2(x-1)(x-2)}{x}$.

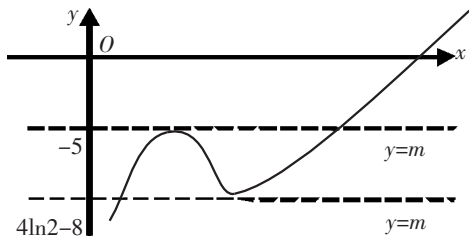
所以, 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下:

x	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增函数	$f(x)$ 取极大值	减函数	$f(x)$ 取极小值	增函数

所以 $f(x)_{\text{极大值}}=f(1)=1^2-6\times 1+4\ln 1=-5$;

$f(x)_{\text{极小值}}=f(2)=2^2-6\times 2+4\ln 2=4\ln 2-8$.

函数 $f(x)$ 的图像大致如下:



所以, 由图像, 若函数 $y=f(x)-m$ 有三个不同的零点, $m \in (-5, 4\ln 2 - 8)$.

点评: 此类利用零点求参数取值范围的问题, 可利用方程求解, 但有时不易甚至不可能解出, 而转化为构造两函数图像求解, 使得问题简单明了. 这也体现了, 当不是求零点, 而是利用零点的个数, 或有零点时求参数的范围, 一般采用数形结合法求解.

七、利用三角代换法求参数取值范围

对于多变元含参数的代数综合题, 有时可通过三角代换法来减少变元个数, 从而化简求解过程.

例 7. 已知 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, 若 x, y 为实数时, 均有 $x+y-k \geq 0$, 求 k 的取值范围.

解析: 所给方程即为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, 从而可设 $\begin{cases} x-1=\cos\alpha, \\ y-1=\sin\alpha, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=1+\cos\alpha, \\ y=1+\sin\alpha. \end{cases}$

对于任意实数 x, y , 要使 $x+y-k \geq 0$, 则须使: $1+\cos\alpha+1+\sin\alpha-k \geq 0$, 即 $k \leq \sin\alpha+\cos\alpha+2=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})+2$ 对 α 为任何实数均成立. 由于 $\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$, 则 $k \leq -\sqrt{2}+2$ 时, $k \leq \sin\alpha+\cos\alpha+2$ 对一切实数 α 均成立, 故 k 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}+2]$.

点评: 在处理许多三角问题时, 我们常将三角问题代数化, 以求化繁为简, 化难为易; 相反, 在处理某些代数问题时, 我们也可以作适当的三角变换, 将代数问题转化为三角问题, 同样可收到令人满意的效果.

八、分类讨论法求参数取值范围

例 8. 设函数 $f_n(x)=x^n+bx+c$ ($n \in \mathbb{N}^*, b, c \in \mathbb{R}$), 设 $n=2$, 若对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)| \leq 4$, 求 b 的取值范围.

解析: 当 $n=2$ 时, $f_2(x)=x^2+bx+c$, 若对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ 都有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)| \leq 4$ 等价于 $f_2(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的差 $M \leq 4$. 据此分类讨论如下:

(i) 当 $|\frac{b}{2}| > 1$, 即 $|b| > 2$ 时, $M = |f(1)-f(-1)| = 2|b| > 4$, 与题设矛盾;

(ii) 当 $-1 \leq -\frac{b}{2} < 0$ 时, 即 $0 < b \leq 2$ 时, $M = f(1)-f(-\frac{b}{2}) = (\frac{b}{2}+1)^2 \leq 4$ 恒成立;

(iii) 当 $0 \leq -\frac{b}{2} \leq 1$ 时, 即 $-2 \leq b \leq 0$ 时, $M = f(-1)-f(\frac{b}{2}) = (-\frac{b}{2}-1)^2 \leq 4$ 恒成立.

综上所述, $-2 \leq b \leq 2$.

点评: 本题把问题转化为二次函数的最值问题, 且属于顶点含参, 区间固定的类型, 须通过分类讨论, 全面考虑对称轴所在的位置对函数最值的影响. 讨论完成后, 要有综述性的语言概括结论.

有关求参数取值范围的问题, 现在越来越受到广泛重视, 解决此类问题的方法多种多样. 因此, 要具体问题具体分析, 这样才能达到较好的效果.

(作者单位: 汕头市达濠第二中学)

责任编辑 徐国坚

