解析：（1）要证明线面垂直，基本思路是用判定定理，即通过证明两次线线垂直来证明.因为 $PC\perp$平面 BDE，$BD\subset$面 BDE，所以 $BD\perp PC$，又 $PA\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$面 $ABCD$，所以 $BD\perp PA$，而 $PC\cap PA=P$，所以 $BD\perp$平面 PAC.

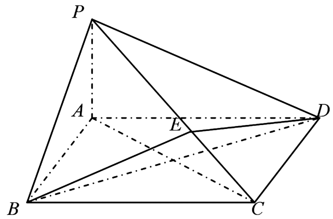

图 1

另一个思路是通过面面垂直的性质：若二个平面互相垂直，则其中一个平面内垂直于两平面交线的直线，垂直于另一个平面.因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$PA\subset$平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$.又因为 $PA\perp BD$，$PC\perp BD$，AC 是 PC 在平面 $ABCD$ 内的投影，所以 $BD\perp AC$，从而根据面面垂直的性质可以得到 $BD\perp$平面 PAC.

注：第二个思路中证明 $BD\perp AC$ 过程实际上就是 2012 年高考陕西理科 18 题（1）[如图 2，证明命题“a 是平面 π 内的一条直线，b 是 π 外的一条直线（b 不垂直于 π），c 是直线 b 在 π 上的投影，若 $a\perp b$，则 $a\perp c$”为真.] 的一个证明方法，下面再给出另一个向量方法：如图 2，过直线 b 上一点作平面 π 的垂线 n，设直线 a，b，c，n 的方向向量分别是 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{n}$，则 b，c，n 共面.根据平面向量基本定理，存在实数 λ，μ 使得 $\vec{c}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{n}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}+\mu\vec{n})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})+\mu(\vec{a}\cdot\vec{n})$，因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，又因为 $a\subset\pi$，$n\perp\pi$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，故 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，从而 $a\perp c$.

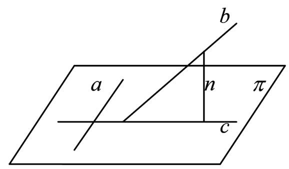

图 2

（2）二面角的平面角的基本作法是：找到其中一个平面的一条垂线（由（1）$BD\perp$面 PAC 知可以找 BD），然后可以在该垂线上任找一点作公共棱的垂线（作 $BF\perp PC$），联结垂足（记 $AC\cap BD=O$，连 FO），则 $\angle BFO$ 就是二面角 $B-PC-A$ 的平面角.由（1）得 $BD\perp AC$，故 $AB=AD$，所以 $PA=1$，$AD=2$，$AB=2$，在 $\triangle PBC$ 中，$PB=\sqrt{5}$，$BC=2$，$PC=3$，所以可知 $\angle PBC=90°$，由等面积法得 $BF=\dfrac{PB\cdot BC}{PC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BOF$ 中，$BO=\sqrt{2}$，$OF=\sqrt{BF^2-BO^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，所以 $\tan\angle BFO=\dfrac{BO}{FO}=3$，于是得二面角 $B-PC-A$ 的正切值为 3.

注：也可利用 $\triangle PAC$ 与 $\triangle OFC$ 相似求 FO 的长.

还可以用射影面积法求：设二面角 $B-PC-A$ 的平面角为 α，由分析知 $\triangle PBC$ 在平面 PAC 上的射影是 $\triangle POC$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{S_{\triangle POC}}{S_{\triangle PBC}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times 2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，故 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$.

前面解决的方法是传统的解法，对于本题，注意到 PA、AB、AD 两两互相垂直，所以也完全可以通过建立空间直角坐标系，利用向量的坐标运算轻松求解.下面仅给出（2）的向量法.

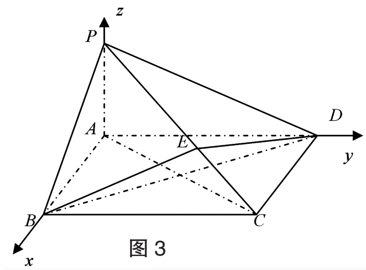

图 3

如图 3，以 AB、AD、AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，$C(2,2,0)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{PA}=(0,0,-1)$，设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=2y=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=2x+2y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=0,\end{cases}$ 故 $\vec{m}=(\dfrac{1}{2},0,1)$.同理可得平面 PAC 的法向量为 $\vec{n}=(-1,1,0)$.于是可得 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，所以二面角 $B-PC-A$ 平面角的余弦值为 $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，由同角三角平方关系得正弦值为 $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，故所求正切值为 3.

例 2.（2012 年湖北高考理科 19 题）如图 4，$\angle ACB=45°$，$BC=3$，过动点 A 作 $AD\perp BC$，垂足 D 在线段 BC 上且异于点 B，连接 AB，沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起，使 $\angle BDC=90°$（如图 5 所示）.

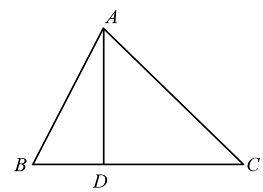

图 4

（Ⅰ）当 BD 的长为多少时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大；

（Ⅱ）当三棱锥 $A-BCD$

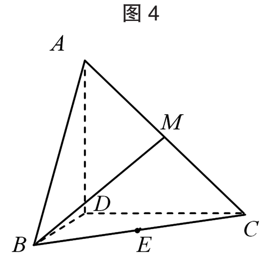

图 5