

数学有数

的体积最大时,设点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点,试在棱 CD 上确定一点 N ,使得 $EN \perp BM$,并求 EN 与平面 BMN 所成角的大小.

解析: (I) 解法 1: 翻折问题应注意在同一平面内的距离、角度具有不变性.由折起前 $AD \perp BC$ 知,折起后(如图 5) $AD \perp DC, AD \perp BD$,且 $BD \cap DC = D$,所以 $AD \perp$ 平面 BCD .在如图 4 所示的 $\triangle ABC$ 中,设 $BD = x$ ($0 < x < 3$),则 $CD = 3 - x$.由 $AD \perp BC, \angle ACB = 45^\circ$ 知, $\triangle ADC$ 为等腰直角三角形,所以 $AD = CD = 3 - x$.又 $\angle BDC = 90^\circ$,所以 $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot DC = \frac{1}{2} x(3-x)$,于是 $V_{A-BDC} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle BDC} = \frac{1}{3} (3-x) \cdot \frac{1}{2} x(3-x) = \frac{1}{6} (x^3 - 6x^2 + 9x)$.令 $f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 6x^2 + 9x)$,由 $f'(x) = \frac{1}{2} (x-1)(x-3) = 0$,且 $0 < x < 3$,解得 $x = 1$.当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$.所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值.故当 $BD = 1$ 时,三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

解法 2: 如果掌握了三项基本不等式,则还可以有这样的解法:前面同解法 1,于是 $V_{A-BDC} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle BDC} = \frac{1}{12} (3-x) \cdot 2x(3-x) \leq \frac{1}{12} \left[\frac{(3-x)+2x+(3-x)}{3} \right]^3 = \frac{2}{3}$, 当且仅当 $2x = 3-x$,即 $x = 1$ 时,等号成立,故当 $x = 1$,即 $BD = 1$ 时,三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

(II) 解法 1: 注意到 DA, DB, DC 两两互相垂直,所以可以建立空间直角坐标系解决.以 D 为原点,建立如图 6 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.由 (I) 知,当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, $BD = 1, AD = CD = 2$.于是可得 $D(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 2, 0), A(0, 0, 2), M(0, 1, 1), E(\frac{1}{2}, 1, 0)$,且 $\overrightarrow{BM} = (-1, 1, 1)$.

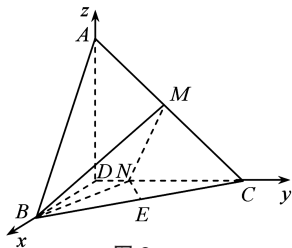


图 6

设 $N(0, \lambda, 0)$,则 $\overrightarrow{EN} = (-\frac{1}{2}, \lambda-1, 0)$.因为 $EN \perp BM$ 等价于 $\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$,即 $(-\frac{1}{2}, \lambda-1, 0) \cdot (-1, 1, 1) = \frac{1}{2} + \lambda - 1 = 0$,故 $\lambda = \frac{1}{2}$, $N(0, \frac{1}{2}, 0)$.所以当 $DN = \frac{1}{2}$ (即 N 是 CD 的靠近点 D 的一个四等分点)时 $EN \perp BM$.设平面 BMN 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,由 $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \end{cases}$,及 $\overrightarrow{BN} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$,得 $\begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases}$,可取

$\vec{n} = (1, 2, -1)$.设 EN 与平面 BMN 所成角的大小为 θ ,则由

$$\overrightarrow{EN} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \vec{n} = (1, 2, -1), \text{ 可得 } \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) =$$

$$\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{EN}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{EN}|} = \frac{|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|}{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \theta = 60^\circ, \text{ 故 } EN$$

与平面 BMN 所成角的大小为 60° .

解法 2: 由 (I) 知,当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, $BD = 1, AD = CD = 2$.如图 7,取 CD 的中点 F ,连结 MF, BF ,则 $MF \parallel AD$.

由 (I) 知 $AD \perp$ 平面 BCD ,所以 $MF \perp$ 平面 BCD .如图 8,延长 FE 至 P 点使得 $FP = DB$,连结 BP, DP ,则四边形 $DBPF$ 为正方形,所以 $DP \perp BF$.取 DF 的中点 N ,连结 EN ,又 E 为 FP 的中点,则 $EN \parallel DP$,所以 $EN \perp BF$.因为 $MF \perp$ 平面 BCD ,又 $EN \subset$ 平面 BCD ,所以 $MF \perp EN$.又 $MF \cap BF = F$,故 $EN \perp$ 平面 BMF .又 $BM \subset$ 平面 BMF ,所以 $EN \perp BM$.因为 $EN \perp BM$ 当且仅当 $EN \perp BF$,而点 F 是唯一的,所以点 N 是唯一的.即当 $DN = \frac{1}{2}$ (即 N 是 CD 的靠近点 D 的一个四等分点), $EN \perp BM$.连接 MN, ME ,由计算得 $NB = NM = EB = EM = \frac{\sqrt{5}}{2}$,所以 $\triangle NMB$ 与 $\triangle EMB$ 是两个共底边的全等的等腰三角形,如图 9 所示,取 BM 的中点 G ,连接 EG, NG ,则 $BM \perp$ 平面 EGN .在平面 EGN 中,过点 E 作 $EH \perp GN$ 于 H ,则 $EH \perp$ 平面 BMN ,故 $\angle ENH$ 是 EN 与平面 BMN 所成的角.在 $\triangle EGN$ 中,易得 $EG = GN = NE = \frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\triangle EGN$ 是正三角形,故 $\angle ENH = 60^\circ$,即 EN 与平面 $\triangle BMN$ 所成角的大小为 60° .

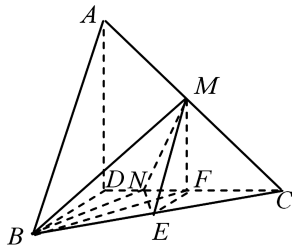


图 7

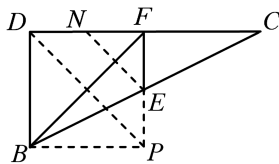


图 8

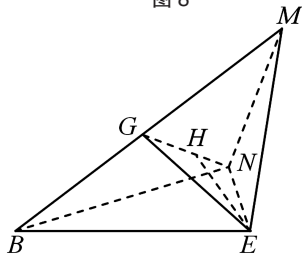


图 9

注: 本题 (2) 的难点在于确定点 N 的位置,向