2012年高考几道源于教材又高于教材的数学试题分析

■童其林

课本是几代人集体智慧的结晶，它具有完备的知识体系，又具有权威性，有的高考题就是课本习题、定理或者习题的稍加改造，如今年的高考数学试题有不少题目就源于教材又高于教材的，即使是综合题，也是基础知识的加工、组合和发展，充分展现了课本的魅力.下面我们仅以福建卷和江苏卷为例加以说明.

例1.（2012年高考福建卷文科18题） 某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

单价 x（元）	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y（件）	90	84	83	80	75	68

(I)求回归直线方程$\hat{y}=bx+a$，其中$b=-20$，$a=\bar{y}-b\bar{x}$；

(II)预计在今后的销售中，销量与单价仍然服从(I)中的关系，且该产品的成本是4元/件，为使工厂获得最大利润，该产品的单价应定为多少元？（利润销售收入成本）

解析：(I)由于$\bar{x}=\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=8.5$，

$\bar{y}=\frac{1}{6}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)=80$，

所以$a=\bar{y}-b\bar{x}=80+20\times8.5=250$，从而回归方程为$\hat{y}=-20x+250$.

(II)设工厂获得的利润为L元，依题意得:

$L=x(-20x+250)-4(-20x+250)=-20x^2+330x-1000=-20(x-\frac{33}{4})^2+361.25$.

当且仅当$x=8.25$时，L取得最大值.

故当单价定为8.25元时，工厂可获得最大利润.

点评：本题是我们非常熟悉的问题，来源于课本必修3（人教版）第95页B组第1题的改造，考查的是回归分析、一元二次函数等基础知识，属简单题.在教材中“回归分析”似乎是冷的，但我们必须清楚，课本的“冷”，有时也可以转为“热”的.

例2.(2012年高考福建卷理科10题)函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义，若对任意$x_1,x_2\in[a,b]$，有$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称$f(x)$在$[a,b]$上具有性质$P$.设$f(x)$在$[1,3]$上具有性质$P$，现给出如下命题：

①$f(x)$在$[1,3]$上的图像是连续不断的；

②$f(x^2)$在$[1,\sqrt{3}]$上具有性质P；

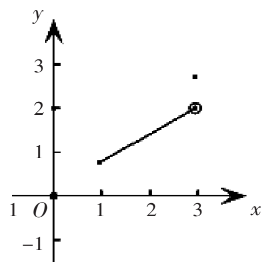
③若$f(x)$在$x=2$处取得最大值1，则$f(x)=1$，$x\in[1,3]$；

④对任意$x_1,x_2,x_3,x_4\in[1,3]$，有$f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})\leqslant\frac{1}{4}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$.

其中真命题的序号是(　)

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

解析：对于①，构造分段函数分析论证可推断出①错误,或构造函数$f(x)$，使$x=3$时是孤立的点，如图，则①可以排除.



对于②,构造临界状态的一次函数$f(x)=-x$,知函数$f(x^2)=-x^2$为凸函数,不具备性质P,所以②错.

对于③,在[1,3]中任取一个数$x(-1\leqslant x\leqslant1)$,另一个数$4-x$同样也落在[1,3]内,因为$f(2)=1=f_{max}(x)$,又因为$f(\frac{x+4-x}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(4-x)]$,即$f(x)+f(4-x)\geqslant2$.又因为$f(x)\leqslant1$,$f(4-x)\leqslant1$,所以$f(x)+f(4-x)\leqslant2$,

即$2\leqslant f(x)+f(4-x)\leqslant2$，所以$f(x)+f(4-x)=2$，又$f(x)$在$x=2$处取得最大值1，所以$f(x)=1$，$f(4-x)=1$,所以③对.

对③也可以这样来分析：

设$\frac{x_1+x_2}{2}=2$，$x_1,x_2\in[1,3]$,则$f(2)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(2)]$,

即$f(x_1)\geqslant f(2)=1$,又$f(x_1)\leqslant1$,所以$f(x_1)=1$,因此③正确.

对于④,$f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})=f(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(\frac{x_1+x_2}{2})+f(\frac{x_3+x_4}{2})]\leqslant\frac{1}{4}[f(x_1)+f(x_2)]+\frac{1}{4}[f(x_3)+f(x_4)]=\frac{1}{4}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$,所以④对,选D.