

## 数学有数

配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、比较法、坐标法、定义法、向量法、导数法、判别式法、消元法等), 并达到熟练程度. 注意通过纵向挖掘, 横向加强不同知识点的联系(如平面向量、不等式、立体几何、圆锥曲线、三角函数、函数等内容的交汇与联系, 等等), 来达到优化认知结构, 开阔眼界, 活跃思维, 提高解题能力的目的.

### 三、重视课本习题潜在功能的挖掘和利用

课本习题具有一定的代表性, 深入研究每一道习题, 充分挖掘其价值, 既可以摆脱题目的困扰, 又可以培养我们的探究能力. 挖掘习题功能一般包括: (1) 习题的多种解法与应用; (2) 条件与结论互换, 命题能否成立; (3) 加强或削弱命题的条件或结论, 能否得到正确命题. 经常这样训练, 无疑可达到以少胜多, 提高创新能力的目的.

#### 练习题:

1. 已知  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - abc$ ,  $a < b < c$ , 且  $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ . 现给出如下结论: ①  $f(0)f(1) > 0$ ; ②  $f(0)f(1) < 0$ ; ③  $f(0)f(3) > 0$ ; ④  $f(0)f(3) < 0$ . 其中正确结论的序号是 ( )

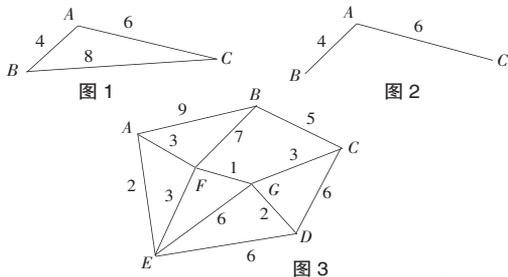
- A. ①③    B. ①④    C. ②③    D. ②④

2. 设函数  $f(x) (x \in \mathbb{R})$  满足  $f(-x) = f(x)$ ,  $f(x) = f(2-x)$ , 且当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x^3$ . 又函数  $g(x) = |x \cos(\pi x)|$ , 则函数  $h(x) = g(x) - f(x)$  在  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  上的零点个数为 ( )

- A. 5    B. 6    C. 7    D. 8

3. 某地图规划道路建设, 考虑道路铺设方案, 方案设计图中, 求表示城市, 两点之间连线表示两城市间可铺设道路, 连线上数据表示两城市间铺设道路的费用, 要求从任一城市都能到达其余各城市, 并且铺设道路的总费用最小. 例如: 在三个城市道路设计中, 若城市间可铺设道路的路线图如图1, 则最优设计方案如图2, 此时铺设道路的最小总费用为10.

现给出该地区可铺设道路的路线图如图3, 则铺设道路的最小总费用为\_\_\_\_\_.



4. 对于实数  $a$  和  $b$ , 定义运算  $*$ :  $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$

设  $f(x) = (2x-1) * (x-1)$ , 且关于  $x$  的方程为  $f(x) = m (m \in \mathbb{R})$

恰有三个互不相等的实数根  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 x_2 x_3$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\cos A = \frac{2}{3}$ ,  $\sin B = \sqrt{5} \cos C$ . (I) 求  $\tan C$  的值; (II) 若  $a = \sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

#### 练习题参考答案:

1. 解析:  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ ,  $(-\infty, 1)$  单调递增,  $(1, 3)$  单调递减,  $(3, +\infty)$  单调递增, 又因为  $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ , 所以  $a \in (-\infty, 1)$ ,  $b \in (1, 3)$ ,  $c \in (3, +\infty)$ ,

法1:  $f(1) = 4 - abc > 0$ ,  $f(3) = -abc < 0$ ,  $f(0) = -abc < 0$ , 选A.

法2: 又因为  $f(b) = b^3 - 6b^2 + 9b - abc = b(b^2 - 6b + 9) - abc = b[(b-3)^2 - ac] = 0$ , 所以  $ac$  为正数, 所以  $a$  为正数, 又因为  $f(0) = -abc < 0$ ,  $f(1) > 0$ ,  $f(3) < 0$ , 选A.

2. 解析: 因为当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x^3$ . 所以当  $x \in [1, 2]$ ,  $(2-x) \in [0, 1]$ ,  $f(x) = f(2-x) = (2-x)^3$ , 当  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  时,  $g(x) = x \cos(\pi x)$ ; 当  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  时,  $g(x) = -x \cos(\pi x)$ , 注意到函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是偶函数, 且  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1)$ ,  $g(\frac{1}{2}) = g(\frac{3}{2}) = 0$ , 作出函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  的大致图像, 函数  $h(x)$  除了0, 1这两个零点之外, 分别在区间  $[-\frac{1}{2}, 0]$ 、 $[0, \frac{1}{2}]$ 、 $[\frac{1}{2}, 1]$ 、 $[1, \frac{3}{2}]$  上各有一个零点, 共有6个零点, 故选B.

3. 解析: 最短路线为  $A-E-F-G < \frac{C-B}{D}$ , 总费用为  $2+3+1+2+3+5=16$ .

4. 解析: 由新定义得  $f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 - (2x-1)(x-1), & 2x-1 \leq x-1 \\ (x-1)^2 - (2x-1)(x-1), & 2x-1 > x-1 \end{cases}$   
 $= \begin{cases} 2x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$  所以可以画出草图, 若方程  $f(x) = m$  有三个根,

则  $0 < m < \frac{1}{4}$ , 且当  $x > 0$  时方程可化为  $-x^2 + x - m = 0$ , 易知  $x_2 x_3 = m$ ; 当

$x \leq 0$  时方程可化为  $2x^2 - x - m = 0$ , 可解得  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+8m}}{4}$ , 所以

$x_1 x_2 x_3 = m \cdot \frac{1 - \sqrt{1+8m}}{4}$ , 又易知当  $m = \frac{1}{4}$  时,  $\frac{1 - \sqrt{1+8m}}{4}$  有最

小值, 所以  $\frac{1}{4} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{4} < m \cdot \frac{1 - \sqrt{1+8m}}{4} < 0$ , 即  $\frac{1 - \sqrt{3}}{16} <$

$x_1 x_2 x_3 < 0$ . 答案是  $(\frac{1 - \sqrt{3}}{16}, 0)$ .

5. 解析: (I)  $\tan C = \sqrt{5}$ ; (II)  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

(作者单位: 福建永定县城关中学)

责任编辑 徐国坚