

高考创新试题,一直以来都是高考试题中最为亮丽的风景线,数列也不例外.解决这类问题往往需要同学们有较强的观察能力、理解能力、分析问题和解决问题的能力,并时刻注意类比与转化思想的应用.

数列创新试题除了以前经常出现的类比联想型、图表信息型、几何计数型、阅读理解型外,最近又出现了即时定义型、分析判断型、规律发现型、逆向探求型、函数迭代型、杨辉三角型等不少新题型,先举例说明,供同学们参考.

一、分析判断型

例 1. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项的积为 T_n , 并且满足条件 $a_1 > 1$, $a_{99}a_{100} - 1 > 0$, $\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1} < 0$. 给出下列结论: ① $0 < q < 1$; ② $a_{99}a_{100} - 1 < 0$; ③ T_{100} 的值是 T_n 中最大的; ④使 $T_n > 1$ 成立的最大自然数 n 等于 198. 其中正确的结论是 ()

A. ①②④ B. ②④ C. ①② D. ①②③④

解析: 因为 $a_1 > 1$, 若 $q < 0$, 则 $a_{99}a_{100} < 0$, 与 $a_{99}a_{100} - 1 > 0$ 矛盾, 故 q 不可能小于 0; 若 $q \geq 1$, 由于 $a_1 > 1$, 则 $a_n > 1$, 故 $\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1} > 0$, 与 $\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1} < 0$ 矛盾, 故 q 不可能大于等于 1; 又等比数列 $q \neq 0$, 因此只能 $0 < q < 1$, 所以①正确.

由 $a_1 > 1$, $0 < q < 1$, $\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1} < 0$ 知 $a_{99} > 1$, $a_{100} < 1$, 故 T_{99}

是 T_n 中最大的, 所以③错误.

又 $a_{99}a_{101} = a_{100}^2 < 1$, 所以②正确.

由 $a_1a_2 \cdots a_{198} = (a_1a_{189})^{99} = (a_{99}a_{100})^{99} > 1$, 知 $T_{189} > 1$, 而 T_{199} 不一定大于 1, 所以④正确.

因此, 答案为 A.

评析: 解决此题, 同学们不仅要熟知等比数列的有关知识, 还要具备较强的分析能力和逻辑推理的能力, 学会从正反两方面考虑问题.

二、即时定义型

例 2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = d$ ($n \in \mathbb{N}^*$, d 为常数), 则称数列 $\{a_n\}$ 为“调和数列”. 已知正项数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 为“调和数列”, 且 $b_1 + b_2 + \cdots + b_9 = 90$, 则 $b_4 \cdot b_6$ 的最大值是 ()

A. 10 B. 100 C. 200 D. 400

解析: 根据“调和数列”的定义, 由已知正项数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 为“调和数列”, 知 $b_{n+1} - b_n = d$ (d 为常数), 所以

数列创新题的新类型及求解策略

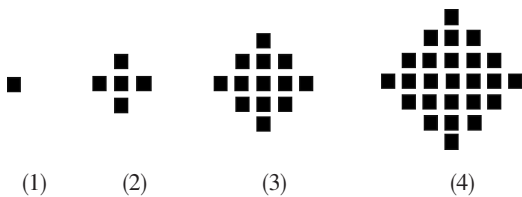
■ 樊宏标

数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 由 $b_1 + b_2 + \cdots + b_9 = 90$ 可得 $b_1 + b_9 = 20$, 所以 $b_4 \cdot b_6 \leq (\frac{b_4 + b_6}{2})^2 = (\frac{b_1 + b_9}{2})^2 = 100$, 故选 B.

评析: 准确理解“调和数列”的定义是求解本题的关键, 即从阅读信息中得出“各项的倒数成等差数列, 则称原数列为‘调和数列’”. 当然本题还用到了等差数列的基本性质, 再结合基本不等式进行求解.

三、规律发现型

例 3. 某少数民族的刺绣有着悠久的历史, 下图 (1)(2)(3)(4) 为她们刺绣最简单的四个图案, 这些图案都是由小正方形构成, 小正方形数越多刺绣越漂亮. 现按同样的规律刺绣 (小正方形的摆放规律相同), 设第 n 个图形包含 $f(n)$ 个小正方形, 则 $f(6) =$ _____.



解析: 从上往下数, 观察四图形小正方形数依次为 1, 1+3+1, 1+3+5+3+1, 1+3+5+7+5+3+1, ..., 知 $f(n) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1 = 2n^2 - 2n + 1$, 故 $f(6) = 61$.

评析: 解决本题的关键是发现小正方形数的增减规律, 这就需要同学们有较强的观察能力和快速探求规律的能力, 在平时应注重这方面的积累.

四、“杨辉三角”型

例 4. 给出下面的数表序列:

表 1	表 2	表 3
1	1	1
	2	2
		2 ²
.....		2 ²
		2 ²

其中表 n ($n=1, 2, 3, \cdots$) 有 n 行, 表中每个数“两脚”的两数都是此数的 2 倍, 记表 n 中所有的数之和为 a_n , 例如 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ _____.