从2012年一道高考压轴题看数学思维过程

■李昭平　汪和平

数学思维的获得在很多情况下是在充分理解题意的情况下，运用观察、联想、猜想，并通过尝试、反思、逻辑表征等等，将问题的思路呈现出来，这其中包含着火热的思维活动过程，然后再将问题以严密的符合逻辑的解答形式呈现出来.

在数学解题教学中，我们应尽可能地将火热的数学思维过程揭示出来，从合情推理中寻找思路，掌握转化方法，培养调控能力，鼓励考生始终保持坚定的信念，引领考生经历探究的全过程，学会数学地思考.下面以2012年高考安徽理科数学第21题压轴题为例看数学思维的过程.

题目:数列$\{x_n\}$满足:$x_1=0$,$x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c$($n\in\mathbf{N}^*$),

(I)证明:数列$\{x_n\}$是单调递减数列的充分必要条件是$c<0$;

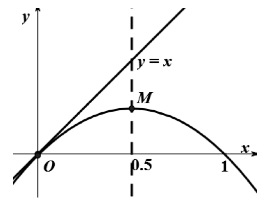
(II)求c的取值范围,使数列$\{x_n\}$是单调递增数列.

第一步:弄清问题,明确思考方向,少走弯路

本题以二次函数为背景，给出了数列的二次递推关系. 按照已有的认知，这类问题很难由递推关系求出通项公式(若能求出通项公式,也往往通过对数运算将指数“放”下来,转化为一次递推式). 又由于题目中需要处理的两问都是不等关系，这决定了本题的思维方向不是求出通项.

两问都是讨论数列的单调性，数列的单调性与函数的单调性概念不同.函数的单调性定义是:对于定义在区间D上的任意x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,都有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则函数$f(x)$是单调递增(减)函数.而数列的单调性定义是:对任意$n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_n<a_{n+1}$(或$a_n>a_{n+1}$)成立,则数列$\{a_n\}$是单调递增(减)数列. 函数的单调性也可以运用导数来判定，运用导数来判定单调性须先将数列转化为函数,并且要注意数列的离散性,两者之间有差别.

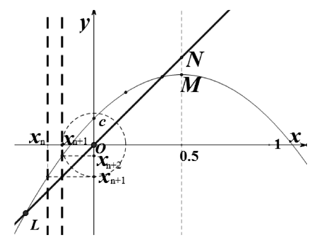
考察函数$f(x)=-x^2+x+c$,知其图像与y轴交于$P(0,c)$,图像关于$x=\frac{1}{2}$对称,顶点坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{4}+c)$.对于问题(I),若数列$\{x_n\}$是单调递减数列,则$x_{n+1}<x_n$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立,即点$(x_n,x_{n+1})$在函数$f(x)=-x^2+x+c$的图像上,且图像上任意一点$(x_n,x_{n+1})$都在直线下方$y=x$.



对于问题(II),求c的取值范围,使数列$\{x_n\}$是单调递增数列.

由问题(I)有$c>0$,函数$y=f(x)$图像在直线$y=x$上方部分应是单调递增函数$y=f(x)$,则函数顶点M应不高于点$N(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

第二步:拟订计划,用图像显示问题的特征



对于问题(I)结合图像特征知数列$\{x_n\}$是单调递减数列的充分必要条件是$c<0$.注意充分必要条件须从两个角度加以证明.

对于问题(II),由函数$y=f(x)$图像的顶点M应在点$N(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$或其下方,知$\frac{1}{4}+c\leqslant\frac{1}{2}$,结合(I)知$0<c\leqslant\frac{1}{4}$,这应该是本题的结论.又$f(x)=-x^2+x+c$与直线$y=x$两交点坐标分为$(-\sqrt{c},-\sqrt{c})$和$(\sqrt{c},\sqrt{c})$,所以应该有$-\sqrt{c}<x_n<\sqrt{c}$.

第三步:实施计划，将直观图像运用逻辑推理表达出来

(I)先证充分性:当$c<0$时，$x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c<x_n$,所以数列$\{x_n\}$是单调递减数列充分条件;再证必要性:若数列$\{x_n\}$是单调递减数列，则$x_1>x_2=-x_1^2+x_1+c\Leftrightarrow c<x_1^2=0$.

综上得数列$\{x_n\}$是单调递减数列的充分必要条件是$c<0$.

(II)假设$\{x_n\}$是递增数列,由$x_1=0$,得$x_2=c$,$x_3=-c^2+2c$,由$x_1<x_2<x_3$，得$0<c<1$.

由$x_n<x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c$知,对任意$n\geqslant1$都有$x_n<\sqrt{c}$……①