

因为 $\sqrt{c-x_{n+1}} = x_n^2 - x_n - c + \sqrt{c} = (1 - \sqrt{c} - x_n)(\sqrt{c} - x_n) \cdots \cdots \textcircled{2}$

由①式和②式可得 $1 - \sqrt{c} - x_n > 0$, 即 $x_n < 1 - \sqrt{c}$, 由②式和 $x_n \geq 0$, 还可得对任意 $n \geq 1$ 都有 $\sqrt{c} - x_{n+1} \leq (1 - \sqrt{c})(\sqrt{c} - x_n) \cdots \cdots \textcircled{3}$

反复运用③式, 得 $\sqrt{c} - x_n \leq (1 - \sqrt{c})^{n-1} (\sqrt{c} - x_1) < (1 - \sqrt{c})^{n-1}$.

将 $x_n < 1 - \sqrt{c}$ 和 $\sqrt{c} - x_n < (1 - \sqrt{c})^{n-1}$ 两式相加, 知 $2\sqrt{c} - 1 < (1 - \sqrt{c})^{n-1}$ 对任意 $n \geq 1$ 成立. 根据指数函数 $y = (1 - \sqrt{c})^n$ 的性质, 得 $2\sqrt{c} - 1 \leq 0, c \leq \frac{1}{4}$, 所以 $0 < c \leq \frac{1}{4}$.

第四步: 回顾, 检查解题过程中的思维是否具有严密性、有无疏漏

上述求解过程实质是由“数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列”, 求得“ c 的取值范围”, 而不是题目所要求“求 c 的取值范围, 使数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列”. 但上述过程已将问题的必要条件求出来了, 只须证明必要条件也是充分条件即可. 若 $0 < c \leq \frac{1}{4}$, 要证数列 $\{x_n\}$ 为递增数列, 即 $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 + c > 0$, 即证 $x_n < \sqrt{c}$ 对任意 $n \geq 1$ 成立.

下面用数学归纳法证明当 $0 < c \leq \frac{1}{4}$ 时, $x_n < \sqrt{c}$ 对任意 $n \geq 1$ 成立: 当 $n=1$ 时, $x_1 = 0 < \sqrt{c} \leq \frac{1}{2}$, 结论成立. 假设当 $n=k (k \in \mathbb{N}^*)$ 时结论成立, 即 $x_k < \sqrt{c}$, 因为函数 $f(x) = -x^2 + x + c$ 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内单调递增, 所以 $x_{n+1} = f(x_n) < f(\sqrt{c}) = \sqrt{c}$, 即当 $n=k+1$ 时, 结论也成立, 故 $x_n < \sqrt{c}$ 对任意 $n \geq 1$ 成立. 因此 $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + c > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是递增数列.

由(1)(2)知, 使得数列 $\{x_n\}$ 单调递增的 c 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4}]$.

本题立意新颖、交汇灵活、设计巧妙, 避开了高考数列题常常关注递推与通项、前项和的视角, 将数列与函数、不等式、简易逻辑相融合, 突出试题的探索性与开放性, 充分体现了新课改理念, 对考生的数学思维水平和数学素养都有较高的要求, 同时也对考生应变能力与心理素质进行了有效测评, 具有很好的选拔区分功能. 据高考阅卷信息反馈, 本题全省考生中只有一人得满分, 比较优秀的考生几乎没有上面第

四步的回顾、检验, 绝大部分考生找不到解题思路, 无从下手, 得分率极低. 这给我们的启示是:

(1) 数学教学要注重培养和发展考生的数学思维能力, 在思维的宽度、深度、厚度和广度上下功夫, 少做题型猜测. 其实, 高考命题的一个成功经验是在知识的交汇点处命题. 从数学发展史与数学知识体系的演绎过程可以看出, 数学不同分支之间的联系本来就很紧密, 因此不同知识点之间的融合命题也很容易. 试卷的不少知识的交汇与命题考查点都有效地回避了热点, 教学中如果一味地去猜测考题的组合形式, 考生在高考中一定难以找到老面孔的, 数学思维必然受阻.

(2) 数学的本质是数学思维. 数学思维过程是一个将未知与已经相融合的过程, 既有同化又有顺应. 需要注意的是数学思维过程中要有明确的解题思想和方向, 然后再将题目提供的新情境转化为已有的知识体系和方法体系来处理, 否则会做许多无用功. 在数学解题教学中, 要尽可能让过程展示思维的风采, 使学生更好地把握数学思维的方法, 这对数学学习十分重要.

练习: (2011 年安徽高考数学理科题) 在数 1 和 100 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n , 再令 $a_n = \lg T_n, n \geq 1$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \tan a_n \cdot \tan a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案: (I) 设 $t_1, t_2, \dots, t_{n+2}$ 构成等比数列, 其中 $t_1=1, t_{n+2}=100$, 则:

$$T_n = t_1 \cdot t_2 \cdots t_{n+1} \cdot t_{n+2} \cdots \textcircled{1} \quad T_n = t_{n+2} \cdot t_{n+1} \cdots t_2 \cdot t_1 \cdots \textcircled{2}$$

① $\times$ ②并利用 $t_i t_{n+3-i} = t_1 t_{n+2} = 10^2 (1 \leq i \leq n+2)$, 得:

$$T_n^2 = (t_1 t_{n+2}) \cdot (t_2 t_{n+1}) \cdots (t_{n+2} t_1) = 10^{2(n+2)}, \quad \text{所以 } a_n = \lg T_n = n+2, n \in \mathbb{N}^*.$$

(II) 由题意和(I)中的计算结果, 知 $b_n = \tan(n+2) \cdot \tan(n+3), n \geq 1$.

另一方面, 利用 $\tan 1 = \tan((k+1)-k) = \frac{\tan(k+1) - \tan k}{1 + \tan(k+1) \cdot \tan k}$, 得:

$$\tan(k+1) \cdot \tan k = \frac{\tan(k+1) - \tan k}{\tan 1} - 1, \text{ 所以:}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \tan(k+1) \cdot \tan k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\tan(k+1) - \tan k}{\tan 1} - 1 \right) = \frac{\tan(n+3) - \tan 3}{\tan 1} - n.$$

(作者单位: 李昭平, 安徽省太湖中学; 汪和平, 安徽省潜山野寨中学)

责任编辑 徐国坚