

## 函数问题常见“错解”的剖析及利用

■雷赠东

“错解”在中学数学学习和解题中是常见的，也是有利用价值的，同学们应该对自己出现的“错解”要有一个正确的认识，懂得“错解”是我们在学习中自然存在的正常现象，“出错”并不可怕。事实上，考生所犯“错解”及其对“错解”的认识，是我们认知过程的重要组成部分。同学们做出的“错解”，从知识与技能掌握的角度来说，我们失败了，但是我们也是成功的，我们也取得了进步，因为我们参与了教学活动，获得了亲身体验。另外，“错解”本身也是一种值得利用的学习资源。行为主义心理学理论告诉我们，学习效果不仅可以从“正反应”（如奖励、肯定）方面强化，也可以从“负反应”方面去强化，可以以“错解”作为学习刺激，反面强化（警示、否定、修正）错误，达到正强化之目的，这种刺激的“加强”效果尤为明显。

因此，我们要善于挖掘和发挥“错解”的认识功能，提高“错解”的教育价值，在学习中以错显正、以错攻错、因错施思，从而达到让我们减少出错的目的。下面通过摘录部分同学在函数部分中常犯的“错解”进行分析，并讨论如何对其加以利用，供同学们参考。

### 一、忽视端点

例 1. 已知  $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ -\sqrt{x}+1, & x \geq 1 \end{cases}$  是  $(-\infty, +\infty)$

上的减函数，那么  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

错解：由  $x < 1$  时，函数  $f(x) = (3a-1)x+4a$  是减函数，可得  $3a-1 < 0$ ，即  $a < \frac{1}{3}$ ；由  $x \geq 1$  时，函数  $f(x) = -\sqrt{x}+1$  是减函数。

综上所述可知  $a$  的取值范围是  $(-\infty, \frac{1}{3})$ 。

错解剖析：错解出现的原因在于，误认为一个函数在所分得的每个区间上都是减函数，则该函数在整个定义域上就是减函数，实际上是错误的。对于分段函数还要注意区间端点的取值，因此本题要考虑  $f(x)$  在  $x=1$  处这个端点值的大小。

正解：同错解，当  $x < 1$  时，得  $a < \frac{1}{3}$ ；

当  $x \geq 1$  时，函数  $f(x) = -\sqrt{x}+1$  是减函数，又  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为减函数，

故应有  $(3a-1) \times 1 + 4a \geq -\sqrt{1}+1$ ，即  $a \geq \frac{1}{7}$ 。

综上所述可知， $a$  的取值范围是  $(\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$ 。

对于“错解”同学们要学会自我提问，对自己的“错解”进行自我反思。要针对自己的错因进行自我纠正，发现错误，从而能正确解题，提高解题能力。

### 二、忽视定义域

例 2. 已知  $f(x)$  是定义在  $[-1, 1]$  上的增函数，且  $f(x-2) < f(1-x)$ ，则实数  $x$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

错解：因为  $f(x)$  是定义在  $[-1, 1]$  上的增函数，且  $f(x-2) < f(1-x)$ ，所以  $x-2 < 1-x$ ，解得  $x < \frac{3}{2}$ ，故实数  $x$  的取值范围是  $(-\infty, \frac{3}{2})$ 。

错解剖析：上面错解中忽略了函数的定义域为  $[-1, 1]$ ，造成错解。

正解：因为  $f(x)$  是定义在  $[-1, 1]$  上的增函数，且  $f(x-2) < f(1-x)$ ，所以  $\begin{cases} -1 \leq x-2 \leq 1, \\ -1 \leq 1-x \leq 1, \end{cases}$  解得  $1 \leq x < \frac{3}{2}$ ，故实数  $x$  的取值范围是  $[1, \frac{3}{2})$ 。

随着学习的推进，同学们学习的内容累计越来越多，这时常常会张冠李戴、丢三拉四，发生混乱错误。因此，在解题时，要善于通过对比来防止发生混淆。对比，可以把同一道题的正误解法进行比较。在正面的基础上，还要从反面进行比较，从而加深对知识或解题方法的理解。

三、概念、性质不清

### 三、概念、性质不清

例 3. 定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  在  $(8, +\infty)$  上为单调递减，且函数  $y=f(x+8)$  为偶函数，则( )

A.  $f(6) > f(7)$                       B.  $f(6) > f(9)$

C.  $f(7) > f(9)$                       D.  $f(7) > f(10)$

错解：根据  $y=f(x+8)$  为偶函数，所以  $f(x+8)=f(-x-8)$ ，又令  $t=8+x$ ，代入  $f(x+8)=f(-x-8)$  中得： $f(x)=f(-x)$ ，所以函数  $f(x)$  是偶函数，再去选择答案时，发现不能确定对错。

错解剖析：由  $f[g(x)]$  为偶函数，则有  $f[g(-x)]=f[g(x)]$ ，而不是  $f[-g(x)]=f[g(x)]$ ，错解是对偶函数的性质运用产生错误。该题还可把  $y=f(x+8)$  向右平移 8 个单位得到  $y=f(x)$  图像，故  $y=f(x)$  的对称轴为  $x=8$ ，从而得到  $f(x)$  的单调性。