

2012 年高考湖北理科数学第 21 题的研究

■田彦武

一、题目及标准解答

设 A 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的任意一点, l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线, D 是直线 l 与 x 轴的交点, 点在 M 直线 l 上, 且满足 $|DM|=m|DA|$ ($m>0$, 且 $m \neq 1$). 当点 A 在圆上运动时, 记点 M 的轨迹为曲线 C .

(I) 求曲线 C 的方程, 判断曲线 C 为何种圆锥曲线, 并求其焦点坐标;

(II) 过原点且斜率 k 为的直线交曲线 C 于 P, Q 两点, 其中 P 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N , 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H . 是否存在 m , 使得对任意的 $k>0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

(I) 解析: 如图 1, 设 $M(x, y), A(x_0, y_0)$, 则由 $|DM|=m|DA|$ ($m>0$, 且 $m \neq 1$),

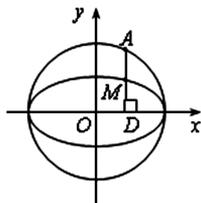


图 1

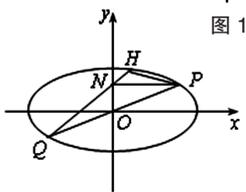


图 2 ($0 < m < 1$)

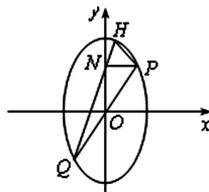


图 3 ($m > 1$)

$$\text{可得 } x=x_0, |y|=m|y_0|, \text{ 所以 } x_0^2, |y_0|^2 = \frac{1}{m^2}|y|^2 \cdots \textcircled{1}$$

正解: $y=f(x+8)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x+8)=f(-x+8)$, 即 $y=f(x)$ 关于直线 $x=8$ 对称, 又 $f(x)$ 在 $(8, +\infty)$ 上为减函数, 故在 $(-\infty, 8)$ 上为增函数, 检验知, 选 D.

同学们学习数学概念, 常由于理解不正确或不全面, 会缩小或扩大了概念的内涵或外延, 导致错误. 同学们要对这些错误进行分析, 突出概念的本质特征, 准确地掌握数学概念. 同学们要重视自己已有或错误的经验对各种现象的理解, 要透过“错解”思考自己这些想法的由来, 体验发现“错解”的过程, 反思错误的原因, 然后再寻找解决问题的办法.

四、函数本质认识不透

例 4. 已知不等式 $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) \geq 9$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 _____.

错解: $\because x+y \geq 2\sqrt{xy}$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{a}{y} \geq 2\sqrt{\frac{a}{xy}}$, $\therefore (x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) \geq 4\sqrt{a}$, 要使 $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) \geq 9$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 只要 $4\sqrt{a} \geq 9$, 即 $a \geq \frac{81}{16}$, 故正实数 a 的最小值为 $\frac{81}{16}$.

错解剖析: 以上解法忽视等号成立的条件而导致错误, 这种错误比较隐蔽不易察觉, 本题中, 当 $a = \frac{81}{16}$

时, 固然有 $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) \geq 9$ 对任意 x, y 恒成立, 但当且仅当 $x=y$ 且 $\frac{1}{x} = \frac{a}{y}$, 即 $a=1$ 且 $x=y$ 时才成立, 显然 $a=1$ 与 $a = \frac{81}{16}$ 两者相矛盾, 故 $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) \geq 4\sqrt{a}$, $4\sqrt{a} \geq 9$ 和 $a = \frac{81}{16}$ 中的等号都不能成立. 在解题中要正确地运用题设, 合理地将已知条件实施等价转换, 从而达到化难为易, 化繁为简, 化未知为已知.

正解: 由 $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) = 1+a+\frac{y}{x} + \frac{ax}{y} \geq 1+a+2\sqrt{a} = (1+\sqrt{a})^2$, 由 $(1+\sqrt{a})^2 \geq 9 \Rightarrow a \geq 4$, 当且仅当 $a=4$ 且 $x=y$ 时, $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}) \geq (1+\sqrt{a})^2$ 且 $(1+\sqrt{a})^2 \geq 9$ 和 $a \geq 4$ 中的等号都成立, 故正实数 a 的最小值为 4.

实践表明, 公开地展示错解, 彻底地暴露错因, 让错误作为反面教员, 同学们通过共同探讨分析, 可以提高学习数学的兴趣, 活跃数学思维, 警惕易犯的错误, 加深知识的理解记忆均有较好的学习效果. 要懂得利用自己的错误来学会反思, 只有自己意识到错误之后, 自己才能从根本上改正错误, 也才能在以后处理类似的问题时否定错误的解法, 从而提高解题能力.

(作者单位: 东莞济川中学)

责任编辑 徐国坚