

因为 A 点在单位圆上运动, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 1 \cdots \textcircled{2}$

将 $\textcircled{1}$ 式代入 $\textcircled{2}$ 式即得所求曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0, \text{且 } m \neq 1)$. 因为 $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 所以:

当 $0 < m < 1$ 时, 曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 两焦点坐标分别为 $(-\sqrt{1-m^2}, 0), (\sqrt{1-m^2}, 0)$;

当 $m > 1$ 时, 曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆, 两焦点坐标分别为 $(0, -\sqrt{m^2-1}), (0, \sqrt{m^2-1})$.

(II) 解法 1: 如图 2.3, $\forall k > 0$, 设 $P(x_1, kx_1), H(x_2, y_2)$, 则 $Q(-x_1, -kx_1), N(0, kx_1)$, 直线 QN 的方程为 $y = 2kx + kx_1$, 将其代入椭圆 C 的方程并整理可得:

$$(m^2 + 4k^2)x^2 + 4k^2x_1x + k^2x_1^2 - m^2 = 0.$$

依题意可知此方程的两根为 $-x_1, x_2$, 于是由韦达定理可得:

$$-x_1 + x_2 = -\frac{4k^2x_1}{m^2 + 4k^2}, \text{ 即 } x_2 = \frac{m^2x_1}{m^2 + 4k^2}.$$

因为点 H 在直线 QN 上, 所以 $y_2 - kx_1 = 2kx_2 = \frac{2km^2x_1}{m^2 + 4k^2}$.

于是 $\overrightarrow{PQ} = (-2x_1, -2kx_1), \overrightarrow{PH} = (x_2 - x_1, y_2 - kx_1) = (-\frac{4k^2x_1}{m^2 + 4k^2}, \frac{2km^2x_1}{m^2 + 4k^2})$.

而 $PQ \perp PH$ 等价于 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PH} = \frac{4(2-m^2)k^2x_1^2}{m^2 + 4k^2} = 0$, 即 $2-m^2=0$, 又 $m > 0$, 得 $m = \sqrt{2}$.

故存在 $m = \sqrt{2}$, 使得在其对应的椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$.

解法 2: 如图 2.3, $\forall x_1 \in (0, 1)$, 设 $P(x_1, y_1), H(x_2, y_2)$, 则 $Q(-x_1, -y_1), N(0, y_1)$, 因为 P, H 两点在椭圆 C 上, 所以 $\begin{cases} m^2x_1^2 + y_1^2 = m^2 \\ m^2x_2^2 + y_2^2 = m^2 \end{cases}$, 两式相减可得: $m^2(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0$. $\textcircled{3}$

依题意, 由点 P 在第一象限可知, 点 H 也在第一象限, 且 P, H 不重合, 故 $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0$. 于是由 $\textcircled{3}$ 式可得 $\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = -m^2$. $\textcircled{4}$

又 Q, N, H 三点共线, 所以 $k_{QN} = k_{QH}$, 即 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

于是由 $\textcircled{4}$ 式可得 $k_{PQ} \cdot k_{PH} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}$. $\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = -\frac{m^2}{2}$.

而 $PQ \perp PH$ 等价于 $k_{PQ} \cdot k_{PH} = -1$, 即 $-\frac{m^2}{2} = -1$, 又 $m > 0$, 得 $m = \sqrt{2}$.

故存在 $m = \sqrt{2}$, 使得在其对应的椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

上, 对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$.

二、试题评析与不同解法及拓展

本题主要考查圆锥曲线中轨迹的求法、直线与圆锥曲线的位置关系; 考查方程的思想、转化与化归思想、分类讨论思想、设而不求和整体思想及相关点法等; 考查考生综合运用数学知识和方法解决数学问题的能力、几何与代数语言的转化能力及计算能力等. 是一道综合性于一体的中高档题.

第(I)小题的点 M 通过动点 A 与已知圆的关系, 把点 A 的坐标用点 M 的坐标表示, 然后代入已知圆的方程得到解决, 其本质是求轨迹方程的相关点法, 即当生成轨迹的动点 M 随着曲线 $f(x, y) = 0$ 上的动点 A 的变动而变动时, 且动点 A 的坐标 (x_0, y_0) 可用动点 M 的坐标 (x, y) 表示为 $\begin{cases} x_0 = g_1(x, y) \\ y_0 = g_2(x, y) \end{cases}$, (*) 则把方程组 (*) 代入动点 A 的曲线方程 $f(x, y) = 0$, 即得动点 M 的轨迹方程.

从映射(变换)的角度看, 就是在映射 $f: (x, y) \rightarrow (x, my) (m > 0 \text{ 且 } m \neq 1)$ 下, 知原像 $(x^2 + y^2 = 1)$ 求像 $(x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0 \text{ 且 } m \neq 1))$ 的问题, 归根结底是基本的换元、消元、列解方程(组)问题, 因而, 上述解法就是求解相关点轨迹问题的通法, 是几何问题代数化的基本数学思想的体现. 另外本小题还可有如下解法:

另解 1: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 点 A 的坐标为 (x_A, y_A) ,

由 $x_A^2 + y_A^2 = 1$, 得 $x_A^2 + (my_A)^2 \times \frac{1}{m^2} = 1$, 将 $\begin{cases} x_A = x \\ y_A = \frac{1}{m}y \end{cases}$ 代入, 得

$$x^2 + y^2 \times \frac{1}{m^2} = 1, \text{ 即 } x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 \text{ 为所求. 下略.}$$

另解 2: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 点 A 的坐标为 (x_A, y_A) ,

$$x_A^2 + y_A^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \cos \theta \\ y_A = \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}), \text{ 又 } \begin{cases} x_A = x \\ y_A = \frac{1}{m}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = m \sin \theta \end{cases}, \text{ 消去 } \cos \theta \text{ 和 } \sin \theta, \text{ 得 } x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1. \text{ 下略.}$$

另解 3: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 点 A 的坐标为 (x_A, y_A) , 根据已知条件得点 D 的坐标 $(x, 0)$, 由 $|DM| = m|DA| (m > 0, \text{且 } m \neq 1)$ 有 $\overrightarrow{MD} = m\overrightarrow{PD}$, 则 $(x, 0) - (x, y) = m[(x, 0) - (x_A, y_A)]$, 解得 $\begin{cases} x_A = x \\ y_A = \frac{1}{m}y \end{cases}$, 因为 $x_A^2 + y_A^2 = 1$, 所以 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1$, 即 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1$ 为所求. 下略.

平面向量知识始终是解决圆锥曲线问题的重要工具, 特别是涉及到距离(或距离的比)、角度、位置关系(平行、垂直、共线等)等方面尤为方便.

第(II)小题可拓展如下: