

过原点且斜率为 k 的直线交曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$ ($mn \neq 0$) 于 P, Q 两点, 其中 k 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N , 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H . 是否存在非零实数 m, n , 使得对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m, n 满足的关系; 若不存在, 请说明理由.

解答如下:

解析: $\forall k > 0$, 设 $P(x_1, kx_1), H(x_2, y_2)$, 则 $Q(-x_1, -kx_1), N(0, kx_1)$, 直线 QN 的方程为 $y = 2kx + kx_1$, 将其代入曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ ($mn \neq 0$) 的方程并整理可得: $(m + 4nk^2)x^2 + 4nk^2x_1x + (nk^2x_1^2 - 1) = 0$.

依题意可知此方程的两根为 $-x_1, x_2$, 于是由韦达定理可得:

$$-x_1 + x_2 = -\frac{4nk^2x_1}{m+4nk^2}, \text{ 即 } x_2 = \frac{mx_1}{m+4nk^2}.$$

又因为点 H 在直线 QN 上, 所以 $y_2 - kx_1 = 2kx_2 = \frac{2kmx_1}{m+4nk^2}$.

于是 $\overrightarrow{PQ} = (-2x_1, -2kx_1), \overrightarrow{PH} = (x_2 - x_1, y_2 - kx_1) = (-\frac{4nk^2x_1}{m+4nk^2}, \frac{2kmx_1}{m+4nk^2})$.

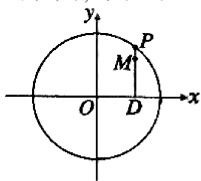
而 $PQ \perp PH$ 等价于 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PH} = \frac{4k^2(2n-m)x_1^2}{m+4nk^2} = 0$, 即 $m = 2n$, 由已知曲线方程知 m, n 同为正, 故存在正数 m, n 满足关系 $m = 2n$, 使得对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$, 此时也易知椭圆的焦点在 y 轴上.

三、试题的渊源

3.1 源于高考题

2011 年高考陕西卷数学科第 17 题 (以下简称原题) 如下:

如图, 设 P 是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上的动点, 点 D 是 P 在 x 轴上投影, M 为 PD 上一点, 且 $|MD| = \frac{4}{5}|PD|$.



(1) 当 P 在圆上运动时, 求点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 求过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的长度.

显然, 本高考题第 (I) 小题完全从原题第 (1) 小题改编而来, 但由于题目中涉及到参数 m , 所以无论从思维跨度还是数学思想和数学能力的考察又高于原题, 综合性较强.

3.2 源于教材

本题的第 (I) 小题从题面形式、结构和解法上来说, 完全等同于人教 A 版教材选修 2-1 《2.2.1 椭圆及其标准方程》第 41 页例 2:

例 2. 如图 2.2-5, 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上任取一点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线段 PD , D 为垂足. 当点 P 在圆上

运动时, 线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么? 为什么?

分析: P 点在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上运动, 点 P 的运动引起点 M 运动. 我们可以由 M 为线段 PD 的中点得到点 M 与点 P 坐标之间的关系式, 并由点 P 的坐标满足圆的方程得到点 M 的坐标所满足的方程.

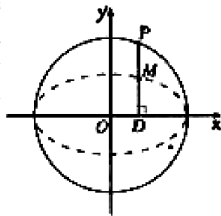


图 2.2-5

教材在解完后, 马上提出“思考: 从例 2 中你能发现椭圆与圆之间的关系吗?”, 意图让考生知道, 圆按照某一个方向作伸缩变换可以得到椭圆. 但由于考生缺乏必要的变化发展的引导过程, 考生一般并不能立即体会这种关系. 教师可以在“思考”栏目里面再加入以下问题:

(1) 若将条件“线段 PD 的中点 M ”改为“线段 PD 的三等分点 M ”, 则点 M 的轨迹又是什么?

(2) 若将条件“线段 PD 的中点 M ”改为“点 M 在线段 DP 的延长线上, 且 $|\frac{DM}{DP}| = \frac{3}{2}$ ”, 则点 M 的轨迹又是什么? (课本第 50 页 B 组第 1 题)

这样通过点 M 的运动方程, 考生才能真正发现椭圆与圆之间的关系, 即将圆纵向往里压缩, 得到焦点在 x 轴上的椭圆; 将圆纵向往外压缩, 得到焦点在 y 轴上的椭圆. 这样的解决设计, 也同时体现了矛盾统一和对立的辩证观点.

数学发展观认为: 数学如同其他事物一样, 是不断在运动、变化中发展的, 又在不断发展中展现新的活力与生命. 考生在学习一个数学新知识时, 若能基于数学发展观, 从问题的实质入手, 对问题的条件、结论及解题方法等方面进行全方位探讨, 在相对完整的运动发展的过程中体会到新知识的应用价值, 那么这样的学习不但是深刻有效的, 而且是有趣的.

显然本高考题将教材例题改编而成, 选材源于教材而又高于教材, 这是高考命题一贯的原则, 也是高考命题的源泉. 因此, 同学们在平时学习的过程中要注重知识过程的产生和形成过程, 关注数学定理、公式的推导过程、运用及例题的求解过程, 从中构建知识体系与知识结构; 掌握题目的通性、通法, 加强对数学思想方法的渗透、提炼与运用; 通过对数学概念和结论产生的过程, 建立严谨的科学态度和不怕困难的科学精神, 从而培养我们自己发现、提出、解决数学问题的能力, 发展我们的创新意识和实践能力.

(作者单位: 深圳市南头中学)

责任编辑 徐国坚