函数、导数与不等式考前预测

■李昭平

函数、导数、不等式三者之间有着紧密的联系.导数是研究函数性质的有力工具，尤其是处理高次函数、分式函数、根式函数、指数函数、对数函数、三角函数以及它们的复合型函数问题时，更能体现其应用价值、思维价值和工具价值.不等式贯穿于函数的单调性、极值、最值等问题之中，同时导数又为一些用传统方法难以处理的不等式问题提供了求解的新思路和新途径.可以说，导数的引入，拓宽了高考对函数与不等式问题的命题空间，以致在近年来的高考中，函数、导数、不等式的交汇成为考查的重点、难点和创新点.

考点 1. 函数基本知识及其联系问题

例 1. 已知某质点在运动过程中，热量 Q 随位移 x 变化的规律是 $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其图像关于坐标原点对称，如图 1 是其图像的一部分，求 $Q(x)$的解析式.

[解析] $\because Q(x)$的图像关于坐标原点对称，$\therefore Q(-x)=-Q(x)$，即 $-ax^3+bx^2-cx+d$ $-ax^3-bx^2-cx-d$，$\therefore b=d=0$.

因此 $Q(x)=ax^3+cx$，$Q'(x)=3ax^2+c$.

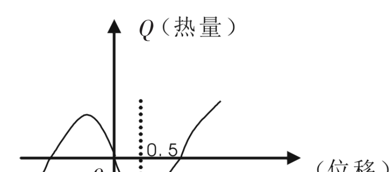

图 1

由图像可知，当 $x=\frac{1}{2}$时，$Q(x)$有极小值-1，所以 $\begin{cases} Q'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}a+c=0, \\ Q(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}a+\frac{c}{2}=-1, \end{cases}$ 解得 $a=4$，$c=-3$，$Q(x)=4x^3-3x$.

[点评] 函数基本知识主要包括函数的奇偶性、单调性、周期性、对称性、图像、极值、最值等.本题以物理知识为背景，给出质点的运动轨迹（即原函数的图像），融函数的奇偶性、导数、极值的考查于一体，从原函数图像上发现其极值点而得到 $Q'(\frac{1}{2})=0$ 是解题的关键.

考点 2. 函数图像的切线及其联系问题

例 2. 反比例函数 $f(x)(x>0)$ 和二次函数 $g(x)$的图像如图 2 所示，在它们交点 P 处的反比例曲线的切线的倾斜角为 $120°$，求 $f(x)+g(x)$的最小值.

[解析] 由题意可设$f(x)=\frac{k}{x}$，$g(x)=ax^2$. 则$f'(x)=-\frac{k}{x^2}$.由导数的几何意义可知：$-\frac{k}{1^2}=\tan 120°$，所以 $k=\sqrt{3}$.

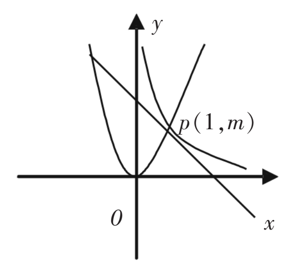

图 2

因此$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{x}$，$P(1,\sqrt{3})$.

将 $P(1,\sqrt{3})$代入 $g(x)=ax^2$ 中，得 $a=\sqrt{3}$.

故 $h(x)=f(x)+g(x)=\frac{\sqrt{3}}{x}+\sqrt{3}x^2$，$x\neq 0$. $h'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{x^2}+2\sqrt{3}x=0$，$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

当 $x>\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时，$h'(x)>0$；$0<x<\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时，$h'(x)<0$.所以 $f(x)+g(x)$的最小值为 $h(\sqrt[3]{\frac{1}{2}})=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[6]{108}$.

[点评] 本题考查函数的图像、函数的解析式和图像的切线，利用导数的几何意义（$f'(1)=\tan 120°$）确定待定系数 k 是解题的关键.函数 $f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$在点（x_0，$f(x_0)$）处的切线斜率，以此点为切点的切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

考点 3. 函数与数列的交汇问题

例 3. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$，数列$\{a_n\}$满足 $f(\log_2 a_n)=-2n$.