

(1)求 $a_n=g(n)$ 的导函数 $g'(n)$;

(2)判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性.

[解析] (1) 由已知, 有 $a_n - \frac{1}{a_n} = -2n$, 即 $a_n^2 + 2na_n - 1 = 0$,

解得 $a_n = -n \pm \sqrt{n^2 + 1}$. 而 $a_n > 0$, 所以 $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$. 于是 $g'(n) =$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1.$$

(2) 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} < 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 所以 $g'(n) =$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 < 0$$
 ($n \in \mathbb{N}^*$),

故数列 $\{a_n\}$ 是单减数列.

[点评] 本题考查了复合函数、数列以及函数单调的导数式条件. 数列是特殊的函数, 将 $a_n=g(n)$ 视为 n 的函数, 利用函数导数的符号判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性.

考点 4. 函数图像的公切线问题

例 4. 设函数 $f(x)=e^x$ 的反函数为 $g(x)$, 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 分别为函数 $f(x)$ 的图像 C_1 和 $g(x)$ 的图像 C_2 上的两个动点, 过 P, Q 的直线为 l , 当 l 为曲线 C_1, C_2 的公切线时, 求 x_1, x_2 满足的关系以及 x_1 的取值范围.

[解析] $f(x)=e^x, f'(x)=e^x; g(x)=\ln x, g'(x)=\frac{1}{x}$.

过 $P(x_1, e^{x_1}), Q(x_2, \ln x_2)$ 的公切线 l 的方程有两种表达式:

$y - e^{x_1} = e^{x_1}(x - x_1)$ 和 $y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$, 即 $y = e^{x_1}x + e^{x_1}(1 - x_1)$ 和 $y = \frac{1}{x_2}x +$

$\ln x_2 - 1$, 因此 $\begin{cases} e^{x_1} = \frac{1}{x_2}, \\ e^{x_1}(1 - x_1) = \ln x_2 - 1, \end{cases}$ 解得 $x_2 = e^{-x_1}, e^{x_1} = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}$. 由

$e^{x_1} = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} > 0 \Rightarrow x_1 < -1$ 或 $x_1 > 1$, 当 $x_1 > 1$ 时, $e^{x_1} > e \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} > e \Rightarrow 1 <$

$x_1 < \frac{e+1}{e-1}$; 当 $x_1 < -1$ 时, $e^{x_1} < e^{-1} \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} < e^{-1} \Rightarrow \frac{1+e}{1-e} < x_1 < -1$.

故 x_1, x_2 满足的关系是 $x_2 = e^{-x_1}$; x_1 的取值范围是 $(\frac{1+e}{1-e}, -1) \cup (1, \frac{e+1}{e-1})$.

[点评] 本题是超越型函数图像的公切线问题, 用传统方法难以求解. 这里根据导数的几何意义得到公切线 l 的两种表达式, 从而构建方程, 获得 x_1, x_2 的关系, 进一步求出 x_1 的取值范围. 一般地, 如果直线 l 切曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别于点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 l 有两种表示方法: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ 和 $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$, 即它们表示同一条直线, 我们常常以此构建方程组 $\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2), \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases}$ 来解决公切线问题.

考点 5. 超越型不等式的证明问题

例 5. 设 $f(x) = x - \sin x$, 若 $x \in [0, \pi], \theta \in (0, \pi)$, 试证明

$$\frac{2f(\theta)+f(x)}{3} \geq f(\frac{2\theta+x}{3}).$$

[解析] $\frac{2f(\theta)+f(x)}{3} - f(\frac{2\theta+x}{3}) = \frac{2(\theta - \sin \theta) + x - \sin x}{3} - \frac{2\theta+x}{3} +$

$$\sin \frac{2\theta+x}{3} = -\frac{2}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \sin x + \sin \frac{2\theta+x}{3}.$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{2}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \sin x + \sin \frac{2\theta+x}{3}, \text{ 则 } g'(x) = -\frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{3} \cos \frac{2\theta+x}{3} = \frac{1}{3} (\cos$$

$$\frac{2\theta+x}{3} - \cos x).$$

$\because x \in [0, \pi], \theta \in (0, \pi), \therefore \frac{2\theta+x}{3} \in (0, \pi)$, 而 $\cos x$ 在

$[0, \pi]$ 内单调递减, 所以由 $g'(x) = \frac{1}{3} (\cos \frac{2\theta+x}{3} - \cos x) = 0$, 得

$x = \theta$. 当 $\theta < x \leq \pi$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $0 \leq x < \theta$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减. 因此 $g(\theta)$ 是 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值.

于是 $g(x) \geq g(\theta) = 0, \frac{2f(\theta)+f(x)}{3} - f(\frac{2\theta+x}{3}) \geq 0$,

即当 $x \in [0, \pi], \theta \in (0, \pi)$ 时, $\frac{2f(\theta)+f(x)}{3} \geq f(\frac{2\theta+x}{3})$

成立.

[点评] 本题中的超越型不等式用传统方法难以证明, 导数为这类问题的研究和解决提供了新思路. 由于导数在这类问题中的应用往往是隐性的, 需要我们去创造条件、去构造模式 (主要是构造新函数, 此题中就是函数 $g(x)$), 这就常常导致我们只重视用传统方法思考, 而忽视导数的应用. 不等式的证明除常见的比较法、分析法、综合法、反证法外, 构造函数、利用导数知识处理是一种非常重要的方法. 在涉及指数、对数、分式、三角等复杂的不等式证明问题中, 有着其他方法不可比拟的优越性, 因此要重点关注.

类型 6. 含参数的恒成立不等式问题

例 6. 已知函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + (a+1)x + 1$, 其中 a 为实数.

若不等式 $f'(x) > x^2 - x - a + 1$ 对任意 $a \in (0, +\infty)$ 都恒成立, 求实数 x 的取值范围.

[解析] 因为 $f'(x) = ax^2 - 3x + (a+1)$, 所以 $f'(x) > x^2 - x - a + 1$ 就是 $ax^2 - 3x + (a+1) > x^2 - x - a + 1$, 即 $(x^2 + 2)a - 2x - x^2 > 0$.

令 $g(a) = (x^2 + 2)a - 2x - x^2$, 则 $g'(a) = x^2 + 2 > 0$, $g(a)$ 在 $a \in (0, +\infty)$ 上单增, $(x^2 + 2)a - 2x - x^2 > 0$ 在 $a \in (0, +\infty)$ 恒成立 $\Leftrightarrow g(0) \geq 0$, 所以 $-2x - x^2 \geq 0$, 解得 $-2x \leq x \leq 0$, 即为实数 x 的取值范围.

[点评] 本题涉及整式函数型恒成立不等式, 主要考查多项式函数的求导法则、导数与函数单调性的关系. 一要注意三次函数的导函数则是二次函数, 二次函数是我们熟悉的模型, 这是导数的降次功能. 二要注意构造新函数 $g(a)$, 活用导数知识求出 $g(a)$ 的值域, 顺利实现解题目标. 一般地, 不等式 $f(x) < k$ (k 为实数) 在 $x \in I$ 上恒成立 $\Leftrightarrow f_{\max} < k$ ($x \in I$); 不等式 $f(x) > k$ (k 为实数) 在 $x \in I$ 上恒成立 $\Leftrightarrow f_{\min} > k$ ($x \in I$). 求解此类问题最常见的方法是函数最值法, 即构造出相应的辅助函数 $f(x)$, 利用上述结论处理. 本题不等式 $(x^2 + 2)a - 2x - x^2 > 0$ 在 $a \in (0, +\infty)$ 恒成立 $\Leftrightarrow g(a) = (x^2 + 2)a - 2x - x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值大于零 $\Leftrightarrow g(a) \geq 0$.