考点 7. 函数式中待定字母的取值范围问题

例 7. 函数 $f(x)=x^2e^{ax}$，其中 $a\in R$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上递增，求实数 a 的取值范围.

[解析] (1) $f(x)=x^2e^x$, $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$. 由 $f'(x)>0$，得 $x^2+2x>0$，$x<-2$ 或 $x>0$；由 $f'(x)<0$，得 $x^2+2x<0$，$-2<x<0$. 所以函数 $f(x)$ 的单增区间是 $(-\infty,-2]$，$[0,+\infty)$，单减区间是 $[-2,0]$.

(2) $f(x)=x^2e^{ax}$, $f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(ax^2+2x)e^{ax}$. 若函数 $f(x)=$ 在 $(-\infty,-1]$ 上递增，则在 $(-\infty,-1]$ 上 $f'(x)=(ax^2+2x)e^{ax}\geqslant 0$，即 $ax^2+2x\geqslant 0$.

因为 $x\in(-\infty,-1]$，所以 $x^2>0$，$ax^2+2x\geqslant 0$ 变为 $a\geqslant -\dfrac{2}{x}$，$a\geqslant(-\dfrac{2}{x})_{\max}$. $-\dfrac{2}{x}$ 在 $x\in(-\infty,-1]$ 上是减函数，最大值为 $-\dfrac{2}{-1}=2$，故 $a\geqslant 2$，即为实数 a 的取值范围.

[点评] 纵观近年来的高考题不难发现，“已知函数的单调性特征，反过来确定函数式中待定字母的取值范围”试题在高考中频频出现，而且试题的深度、广度和难度也在不断增大. 这种逆向设置的问题，有一定的开发性，能有效考查学生对函数、导数、不等式思想方法的掌握程度、思维水平和综合能力. 显然，这些试题用单调性的定义求解，将会十分复杂，甚至无法求解. 而运用导数符号与函数单调性的关系来处理则是一种有效途径. 对于可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上单增（或单减）的充要条件是：在 $x\in D$ 上恒有 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），且 $f'(x)$ 在 D 的任意子区间上都不恒为零. 在高中阶段，主要出现的是有一个或多个（有限个）使 $f'(x)=0$ 的点 x 的情况. 比如，函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，其中有一个 $x_0=0$，使 $f'(x_0)=0$ 成立. 注意 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）是 $f(x)$ 为增（或减）函数的充分而非必要的条件，避免当做充要条件使用. 这里不能由不等式 $ax^2+2x>0$ 求实数 a 的取值范围.

考点 8. 分类讨论待定字母的取值范围问题

例 8. 求函数 $f(x)=x\ln(-x)+(a-1)x(a\in R)$ 在区间 $[-e^2,-e^{-1}]$ 上的最大值 $g(a)$.

[解析] $f'(x)=\ln(-x)+a$. 由 $f'(x)=\ln(-x)+a=0$，得 $x=-e^{-a}$.

①若 $-e^{-a}<-e^2$，即 $a<-2$，函数在 $[-e^2,-e^{-1}]$ 上递减，$g(a)=f(-e^2)=-(a+1)e^2$.

②若 $-e^2\leqslant -e^{-a}<-e^{-1}$，即 $-2\leqslant a<1$ 时，$g(a)=f(-e^{-a})=e^{-a}$.

③若 $-e^{-a}\geqslant -e^{-1}$，函数在 $[-e^2,-e^{-1}]$ 上递增，$g(a)=f(-e^{-1})=\dfrac{2-a}{e}$.

$$故\ g(a)=\begin{cases}-(a+1)e^2, & (a<-2)\\ e^{-a}, & (-2\leqslant a<1)\\ \dfrac{2-a}{e}. & (a\geqslant 1)\end{cases}$$

[点评] 本题中 a 为任意实数，$f'(x)$ 的零点 $x=-e^{-a}$ 是否在所给的区间 $[-e^2,-e^{-1}]$ 内，有 a 待于的取值，必须对零点 $x=-e^{-a}$ 与区间 $[-e^2,-e^{-1}]$ 的位置关系进行分类讨论. 一般地，分类讨论有“三步曲”：一是选择分类对像，即对什么东西进行分类（这里零点 $x=-e^{-a}$ 与区间 $[-e^2,-e^{-1}]$ 的位置关系由 a 确定，因此选择 a 为分类对像）；二是确定分类标准，即怎样分类（这里根据零点 $x=-e^{-a}$ 在区间 $[-e^2,-e^{-1}]$ 的左边、内部、右边分成 $a<-2$、$-2\leqslant a<1$ 和 $a\geqslant 1$ 三类）；三是深化分类层次（就是在一级分类中再进行二级分类，即分类中分类，本题不涉及）. 导数、不等式在函数的应用中，常常涉及到待定的字母，函数的单调性、极值、最值以及图像的形状等等都与字母的取值有关，此时要牢记对待定字母的分类讨论，切实把握分类讨论的“三步曲”，否则极易出错.

考点 9. 函数的零点个数问题

例 9. 试判断函数 $f(x)=x^2-8\ln x-8$ 的零点个数.

[解析] 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 由 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}=0$，得 $x=\pm 2$，取 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$. 所以函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处取极小值，也是最小值，且最小值为 $f(2)=2^2-8\ln 2-8=-4-8\ln 2<0$.

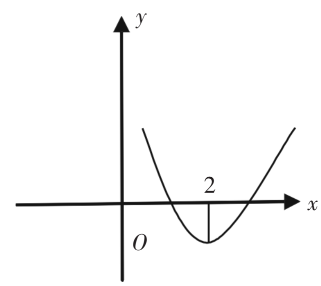

图 3

如图 3，当 x 逐渐靠近零时，$f(x)$ 越来越大；当 x 大于 2，并逐渐大时，$f(x)$ 也越来越大. 因此函数 $f(x)$ 有两个零点.

[点评] 超越函数的零点个数用传统方法处理往往不易，导数是很好的工具. 解题的基本步骤是：求 $f'(x)=0$ 的根 x_0；判断在根 x_0 的两侧 $f'(x)$ 的符号；确定 x_0 是极大值点，还是极小值点，或不是极值点；求最值；画出 $f(x)$ 的草图，观察即可.

考点 10. 函数图像的交点个数问题

例 10. 已知 $f(x)=-x^2+8x$，$g(x)=6\ln x+m$，是否存在实数 m，使得函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像有且只有一个交点？若存在，请求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

[解析] 函数的 $y=f(x)$ 图像与函数 $y=g(x)$ 的图像的交点个数问题，就是方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上实根的个数问题，进一步就是函数 $h(x)=g(x)-f(x)$ 的图像与 x 轴交点的个数问题.

因为 $h(x)=6\ln x+m+x^2-8x$，所以 $h'(x)=\dfrac{6}{x}+2x-8=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{x}$ $(x>0)$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $1<x<3$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>3$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. 所以 $h(x)$ 的极大值为 $h(1)=m-7$，极小值为 $h(3)=m+6\ln 3-15$，并且当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$；当 $x\to 0^+$ 时，$h(x)\to-\infty$. 因此要使 $h(x)=g(x)-f(x)<0$ 的图像与 x 轴有且只有一个交点，必须且只

（下转第 23 页）