高考数列命题热点探析

■许少华

纵观近三年广东高考数学试卷，无论文科还是理科，对于数列内容的考查相对比较稳定，试题一大一小，分数为19分.试题内容也比较相似，小题都是考查等差、等比数列的通项公式与前 n 项和公式的应用，此题的难度很小，百分之八十以上的考生都能顺利得分.大题都与递推关系或通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系有关，然后考查求具体的项与通项公式，最后都是与不等式有关的证明问题，且在证明过程中又都无一例外的用到裂项与放缩技巧.2014年呢？由于高考命题要求在稳定中创新、在中改革，于是，我们预测其命题热点有以下几个方面，供参考.

热点一：客观题仍考查等差、等比数列的基础知识与简单的常用技能

例1. 设首项为1，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　　）

A. $S_n=2a_n-1$　　　　B. $S_n=3a_n-2$

C. $S_n=4-3a_n$　　　　D. $S_n=3-2a_n$

$\boxed{解析一}$ 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-a_n\cdot\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3-2a_n$，选D.

$\boxed{解析二}$ 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$q=\frac{2}{3}\Rightarrow a_n=(\frac{2}{3})^{n-1}$.

于是，$S_n=\frac{1\times[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}=3[1-(\frac{2}{3})^n]=3[1-\frac{2}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}]=3-2a_n$

$\boxed{点评}$ 等差、等比数列的基础知识与简单的常用技能是处理数列问题的思维起点，也是数列中应用数学思想方法的入手点，因此，在各级各类的考试中对这些内容的考查作为检查高中生对基础知识的普遍掌握情况十分有利.

热点二：客观题转变考查方向，建立在数列基础知识与基本技能的基础上考查分析与推理能力

例2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=(\frac{2}{3})^{n-1}[(\frac{2}{3})^{n-1}-1]$，下列表述正确的是（　　）

A. 最大项为0，最小项为 $-\frac{20}{81}$

B. 最大项为0，最小项不存在

C. 最大项不存在，最小项为 $-\frac{20}{81}$

D. 最大项为0，最小项为 a_4

$\boxed{解析}$ (1)由 $a_n=(\frac{2}{3})^{n-1}[(\frac{2}{3})^{n-1}-1]$，得 $a_1=0$.

$\because$ 当 $n>1$ 时，$0<(\frac{2}{3})^{n-1}<1$，

$\therefore a_n$ 最大项为 $a_1=0$.

又 $a_{n+1}-a_n=(\frac{2}{3})^n[(\frac{2}{3})^n-1]-(\frac{2}{3})^{n-1}[(\frac{2}{3})^{n-1}-1]=(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{3^{n-1}-\frac{5}{6}\times2^n}{3^n}$，显然，当 $n\geqslant3$ 时，$a_{n+1}-a_n>0$；当 $n<3$ 时，$a_{n+1}-a_n<0$.

于是，最小项为 $a_3=-\frac{20}{81}$，故选A.

$\boxed{点评}$ 从函数角度来认识本题最有利于求解，函数的最值往往与单调性有关，那么数列的最值呢？也与数列的单调性有关，于是，借助数列的单调性最终产生结论.

例3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^na_n=2n-1$，则 $\{a_n\}$ 的前60项和为________.

$\boxed{解析一}$ 由题设知，$a_2-a_1=1\cdots$①；$a_3+a_2=3\cdots$②；$a_4-a_3=5\cdots$③；$a_5+a_4=7\cdots$④；$a_5+a_4=7$，$a_6-a_5=9$，$a_7+a_6=11$，$a_8-a_7=13$，$a_9+a_8=15$，$a_{10}-a_9=17$，$a_{11}+a_{10}=19$，$a_{12}-a_{11}=21$，……

$\therefore$②-①得 $a_1+a_3=2$，③+②得 $a_4+a_2=8$，

同理可得 $a_5+a_7=2$，$a_6+a_8=24$，$a_9+a_{11}=2$，$a_{10}+a_{12}=40$，…，

$\therefore a_1+a_3$，a_5+a_7，a_9+a_{11}，…，是各项均为2的常数列，

a_2+a_4，a_6+a_8，$a_{10}+a_{12}$，…是首项为8，公差为16的等差数列，

则 $\{a_n\}$ 的前60项和为 $15\times2+15\times8+\frac{1}{2}\times16\times15\times14=1830$.

$\boxed{解析二}$ 由 $a_{n+1}+(-1)^na_n=2n-1\Rightarrow\begin{cases}a_{4n+2}-a_{4n+1}=8n+1,\\a_{4n+3}+a_{4n+2}=8n+3,\\a_{4n+4}-a_{4n+3}=8n+5\end{cases}\Rightarrow a_{4n+1}+a_{4n+2}+a_{4n+3}+a_{4n+4}=16n+8$，

令 $b_{n+1}=a_{4n+1}+a_{4n+2}+a_{4n+3}+a_{4n+4}$，

则 $b_{n+1}=b_n+16$，又 $b_1=a_1+a_2+a_3+a_4=10\Rightarrow S_{15}=10\times15+\frac{15\times14}{2}\times16=1830$.

则 $\{a_n\}$ 的前60项和为1830.

$\boxed{点评}$ 本题无论是方法一还是方法二，在规定的时间内都不太好想，说它很难吧，不是；说它不难吧，显然也不准确.反复应用递推关系是求解的关键.

热点三：解答题延续去年的热点，继续建立在 a_n 与 s_n 关系的基础上考查通项公式的求法及放缩法证明不等式

例4. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=\frac{1}{2}$，$S_n=n^2a_n-n(n-1)$，$n=1,2,\cdots$