

(1) 写出 S_n 与 S_{n-1} 的递推关系式 ($n \geq 2$), 并求 S_n 关于 n 的表达式;

(2) 设 $f_n(x) = \frac{S_n}{n} x^{n+1}$, $b_n = f'_n(p)$ ($p \in \mathbb{R}$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 求证: $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_1+S_2} + \cdots + \frac{1}{S_1+S_2+\cdots+S_n} > \frac{2n}{n+1}$.

解析 (1) 由于 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$, 那么 $S_n = n^2(S_n - S_{n-1}) - n(n-1)$, 则 $\frac{(n+1)S_n}{n} - \frac{nS_{n-1}}{n-1} = 1$,

因此 $\frac{(n+1)S_n}{n} = \frac{2S_1}{1} + (\frac{3S_2}{2} - \frac{2S_3}{1}) + \cdots + (\frac{(n+1)S_n}{n} - \frac{nS_{n-1}}{n-1}) = n$.

于是 $S_n = \frac{n^2}{n+1}$.

(2) 由 $f_n(x) = \frac{S_n}{n} x^{n+1}$, 得 $f'_n(x) = \frac{n^2}{n+1} x^{n+1}$,

那么 $f'_n(x) = nx^n$, 于是 $b_n = np^n$,

得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots + np^n$.

1° 若 $p=0$ 时, 则 $T_n=0$;

2° 若 $p=1$ 时, 则 $T_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$;

3° 若 $p \neq 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 则 $pT_n = p^2 + 2p^3 + 3p^4 + \cdots + np^{n+1}$, 则 $(1-p)T_n = p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n - np^{n+1} = \frac{p(1-p^n)}{1-p} - np^{n+1}$, 得 $T_n = \frac{p(1-p^n)}{(1-p)^2} - \frac{np^{n+1}}{1-p}$.

(3) 由 (1) 得 $S_n = \frac{n^2}{n+1} < n$.

于是 $S_1 + S_2 + \cdots + S_k < 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \frac{1}{S_1 + S_2 + \cdots + S_k} >$

$\frac{2}{k(k+1)} = 2(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$,

那么 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_1+S_2} + \cdots + \frac{1}{S_1+S_2+\cdots+S_n} > 2[(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})] = \frac{2n}{n+1}$.

点评 本题延续去年的热点, 继续考查与 S_n 有关的递推式. 值得一提的是: 广东的高考命题有延续往年热点的“习惯”, 看看近年的三角试题 (解答的第一题), 连续四年的命题, 从形式到内容都非常接近. 再看 2012 年高考数列题与 2013 年高考数列题是多么接近啊! 再延续一年完全有可能.

热点四: 解答题降低难度, 考查等差、等比数列基本运算与基本技能

例 5. 64 个正数排成 8 行 8 列, 如右图所示: 其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的数. 已知每一行中的数依次都成等差数列; 每一列中的数依次都成等比数列, 且公比均为 $q: a_{11} = \frac{1}{2}, a_{24} = 1, a_{21} = \frac{1}{4}$.

(1) 求 a_{12} 和 a_{13} 的值;

(2) 记第 n 行各项之和为 A_n ($n \in \mathbb{N}^*$ 且 $1 \leq n \leq 8$), 数列 $\{a_n\}$,

$\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足 $a_n = \frac{36}{A_n}, mb_{n+1} = 2(a_n + mb_n)$ (m 为非零常数), $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, 且 $c_1^2 + c_7^2 = 100$, 求 $c_1 + c_2 + \cdots + c_7$ 的取值范围;

(3) 对 (2) 中 a_n , 记 $d_n = \frac{200}{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 设 $B_n = d_1 d_2 \cdots d_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求数列 $\{B_n\}$ 中最大项的项数.

解析 (I) 因为 $q = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$, 所以 $a_{14} = \frac{a_{24}}{q} = 2$. 又 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 成等差数列, 公差设 d , 由 $a_{14} = a_{11} + 3d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$, 所以 $a_{12} = 1, a_{13} = \frac{3}{2}$.

(II) 由 (I) 得, 第一行所成等差

数列公差为 $\frac{1}{2}$, 所以 $a_{18} = 4$.

因为 $a_{n1} = a_{11} \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^n, a_{n8} = a_{18} \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = 8 \times (\frac{1}{2})^n$.

所以 $A_n = \frac{a_{n1} + a_{n8}}{2} \times 8 = 36 \times (\frac{1}{2})^n$, 所以 $a_n = 2^n$ ($1 \leq n \leq 8, n \in \mathbb{N}^*$).

因为 $mb_{n+1} = 2(a_n + mb_n)$, 所以 $mb_{n+1} = 2^{n+1} + 2mb_n$.

整理得 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n} = \frac{1}{m}$. 而 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, 所以 $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{m}$, 得 $\{c_n\}$ 是等差数列.

故 $c_1 + c_2 + \cdots + c_7 = \frac{(c_1 + c_7) \times 7}{2}$.

因为 $\frac{1}{m} \neq 0$, 所以 $c_1 \neq c_7$, 所以 $2c_1 c_7 < c_1^2 + c_7^2$.

得 $(c_1 + c_7)^2 = c_1^2 + c_7^2 + 2c_1 c_7 < 2(c_1^2 + c_7^2) = 200$,

即 $-10\sqrt{2} < c_1 + c_7 < 10\sqrt{2}$. 于是 $c_1 + c_2 + \cdots + c_7$ 的取值范围是 $(-35\sqrt{2}, 35\sqrt{2})$.

(III) 因为 $d_n = 200 \times (\frac{1}{2})^n$ 是一个正项递减数列, 所以当 $d_n \geq 1$ 时, $B_n \geq B_{n-1}$, 当 $d_n < 1$ 时, $B_n < B_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*, n > 1$).

于是 $\{B_n\}$ 中最大项满足 $\begin{cases} d_n \geq 1, \\ d_{n+1} < 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 200 \times (\frac{1}{2})^n \geq 1, \\ 200 \times (\frac{1}{2})^{n+1} < 1. \end{cases}$

解得 $6 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{25} < n \leq 7 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{25}$. 又 $0 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{25} < 1$, 且 $n \in \mathbb{N}^*$,

所以 $n=7$, 即 $\{B_n\}$ 中最大项的项数为 7.

点评 本题共三问, 看看第一问是等差数列与等比数列的基础知识问题, 没有什么难度. 第二问呢? 虽然看上去绕了很多弯, 但只要认清每一步涉及的基础知识与基本技能, 也会顺利完成. 第三问呢? 无论是分析还是求解, 都在常规之列, 也不算难. 但当这三问合在一起时, 再说此题是简单题恐怕就没有人同意了. 本题很全面, 你再仔细看看, 它涉及的知识点有多少个? 方法与技能又有多少个? 这样你就明白了, 表面上看是降低了难度, 考查也转向基础了, 但因全面而使试题显得更有区分度.

热点五: 解答题真正在递推数列上作文章, 从求解递推式