

必备的基本技能入手,考查通项公式、求和及不等式的证明

例 6. 设 $\alpha > 2$, 给定数列 $\{a_n\}$, 其中 $x_1 = \alpha, x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$, 求证:

(1) 若 $y_n = \lg \frac{x_n - 2}{x_n}$, 则数列 $\{y_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $\alpha > 3$, 则当 $n \geq \lg \frac{\alpha}{3} / \lg \frac{4}{3}$ 时, $x_n < 3$;

(3) 若 $\alpha < 3$, 那么 $x_n \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

解析 (1) 由 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} - 2 = \frac{(x_n - 2)^2}{2(x_n - 1)} \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1}} = \frac{(x_n - 2)^2}{x_n^2}$

$(\frac{x_n - 2}{x_n})^2$, 由于 $\alpha > 2$, 易得 $\frac{x_n - 2}{x_n} > 0$, 于是 $\lg \frac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1}} = 2 \lg \frac{x_n - 2}{x_n} \Rightarrow y_{n+1} = 2y_n$.

故数列 $\{y_n\}$ 是等比数列.

(2) 由 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{2(x_n - 1)} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{x_n - 1})$, 得 $x_k > 3$ 时, $\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{3}{4} < 1$ 即 $x_{k+1} < x_k$.

假设 $\alpha > 3$, 当 $n \geq \lg \frac{\alpha}{3} / \lg \frac{4}{3}$ 时, 有 $x_{n+1} \geq 3$.

由 $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} \geq 3$ 及 $x_1 = \alpha$, 得 $3 \leq x_{n+1} = x_1 \cdot (\frac{x_2}{x_1}) \cdot \dots \cdot$

$(\frac{x_{n+1}}{x_n}) < \alpha (\frac{3}{4})^n \Rightarrow n < \lg \frac{\alpha}{3} / \lg \frac{4}{3}$ 与假设矛盾.

故当 $n \geq \lg \frac{\alpha}{3} / \lg \frac{4}{3}$ 时, $x_n < 3$.

(3) 由 (1) 得 $\frac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1}} = (\frac{x_n - 2}{x_n})^2 \Rightarrow \frac{x_n - 2}{x_n} = (\frac{\alpha - 2}{\alpha})^{2^{n-1}} \Rightarrow x_n = 2 +$

$\frac{2}{(\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}} - 1}$.

$\because \alpha > 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha-2} > 1 \Rightarrow (\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}} > 1$, 又由 $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots \geq 1 + nx$,

得 $(\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}} = (1 + \frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}} \geq 1 + (\frac{\alpha}{\alpha-2}) \cdot 2^{n-1} \geq 1 + 2^n \Rightarrow x_n = 2 +$

$\frac{2}{(\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}} - 1} \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

点评 本题的第一问考查递推公式的变形技巧及等比数列的判定, 显然, 有难度. 第二问考查反证法与放缩法的综合应用, 其间用恒等式的构造, 有难度也有灵活性. 第三问在第一问的基础上, 再多次使用放缩法, 最终产生结论, 寥寥几笔, 数学味极浓.

热点六: 解答题建立在分析、探索、发现的基础上考查考生分析问题与解决问题的能力

例 7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} = (2 + \cos n\pi)(a_n - 1) + 3, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求通项公式 a_n ;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 问: 是否存在正整数 m, n 使得

$S_{2n} = mS_{2n-1}$? 若存在, 请求出所有的符合条件的正整数对 (m, n) , 若不存在, 请说明理由.

解析 (1) 当 n 是奇数时, $\cos n\pi = -1$; 当 n 是偶数时, $\cos n\pi = 1$.

所以, 当 n 是奇数时, $a_{n+2} = a_n + 2$; 当 n 是偶数时, $a_{n+2} = 3a_n$.

又 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 所以 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列; $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, \dots$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列.

所以, $a_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 2 \times 3^{\frac{n}{2}-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$

(2) 由 (1), 得 $S_{2n} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = [1 + 3 + \dots + (2n-1)] + (2 + 6 + \dots + 2 \times 3^{n-1}) = 3^n + n^2 - 1, S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = 3^n + n^2 - 1 - 2 \times 3^{n-1} = 3^{n-1} + n^2 - 1$.

所以, 若存在正整数 m, n , 使得 $S_{2n} = mS_{2n-1}$,

则 $m = \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}} = \frac{3^n + n^2 - 1}{3^{n-1} + n^2 - 1} = 1 + \frac{2 \times 3^{n-1}}{3^{n-1} + n^2 - 1} \leq 1 + \frac{2 \times 3^{n-1}}{3^{n-1}} = 3$.

显然, 当 $m = 1$ 时, $S_{2n} = 3^n + n^2 - 1 \neq 1 \times (3^{n-1} + n^2 - 1) = S_{2n-1}$;

当 $m = 2$ 时, 由 $S_{2n} = 2S_{2n-1}$, 整理得 $3^{n-1} = n^2 - 1$.

显然, 当 $n = 1$ 时, $3^{1-1} = 1 \neq 0 = 1^2 - 1$; 当 $n = 2$ 时, $3^{2-1} = 3 = 2^2 - 1$, 所以 (2, 2) 是符合条件的一个解.

当 $n \geq 3$ 时, $3^{n-1} = (1+2)^{n-1} = 1 + C_{n-1}^1 \times 2 + C_{n-1}^2 \times 2^2 + \dots \geq 1 + 2C_{n-1}^1 + 4C_{n-1}^2 = 2n^2 - 4n + 3 = (n-2)^2 + n^2 - 1 > n^2 - 1$.

当 $m = 3$ 时, 由 $S_{2n} = 3S_{2n-1}$, 整理得 $n = 1$,

所以 (3, 1) 是符合条件的另一个解.

综上所述, 所有的符合条件的正整数对 (m, n) , 有且仅有 (3, 1) 和 (2, 2) 两对.

点评 本题建立在分析、探索、发现的基础上, 考查考生分析问题与解决问题的能力很到位. 首先通项公式, 要借助分类思想来完成. 其次, 要“锁定” m 的范围, 这个看似简单的步骤, 其实蕴含多种基本方法 (合理处理分式、放缩等), 这些方法有一种不过关就很难产生结论.

热点七: 解答题建立在交汇考查的基础上, 设计与其它知识结合的“多功能”试题

例 8. 在直角坐标平面上有一点列 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$, 对一切正整数 n , 点 P_n 位于函数 $y = 3x + \frac{13}{4}$ 的图像上, 且 P_n 的横坐标构成以 $-\frac{5}{2}$ 为首项, -1 为公差的等差数列 $\{x_n\}$.

(1) 求点 P_n 的坐标;

(2) 设抛物线列 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 中的每一条的对称轴都垂直于 x 轴, 第 n 条抛物线 c_n 的顶点为 P_n , 且过点 $D_n(0, n^2 + 1)$, 记与抛物线 c_n 相切于 D_n 的直线的斜率为 k_n , 求 $\frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2 k_3} + \dots + \frac{1}{k_{n-1} k_n}$;

(3) 设 $S = \{x | x = 2x_n, n \in \mathbb{N}^*\}, T = \{y | y = 4y_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的任一项 $a_n \in S \cap T$, 其中 a_1 是 $S \cap T$ 中的最大数, $-265 < a_{10} < -125$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.