

解析 (1) $x_n = -\frac{5}{2} + (n-1) \times (-1) = -n - \frac{3}{2}$, $\therefore y_n = 3x_n + \frac{13}{4} = -3n - \frac{5}{4}$.

$$\therefore P_n = (-n - \frac{3}{2}, -3n - \frac{5}{4}).$$

(2) $\because c_n$ 的对称轴垂直于 x 轴, 且顶点为 P_n ,

$$\therefore \text{设 } c_n \text{ 的方程为: } y = a(x + \frac{2n+3}{2})^2 - \frac{12n+5}{4},$$

把 $D_n(0, n^2+1)$ 代入上式, 得 $a=1$,

$$\therefore \text{设 } c_n \text{ 的方程为: } y = x^2 + (2n+3)x + n^2 + 1, y' = 2x + 2n + 3.$$

当 $x=0$ 时, $k_n = 2n+3$,

$$\therefore \frac{1}{k_{n-1}k_n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$\therefore \frac{1}{k_1k_2} + \frac{1}{k_2k_3} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}k_n} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{4n+6}.$$

$$(3) S = \{x | x = -(2n+3), n \in \mathbb{N}, n \geq 1\},$$

$$T = \{y | y = -(12n+5), n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = \{y | y = -2(6n+1) - 3, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\},$$

$$\therefore S \cap T = T, T \text{ 中最大数 } a_1 = -17.$$

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_{10} = -17 + 9d \in (-265, -125)$, 由此得,

$$-\frac{248}{9} < d < -12.$$

$$\text{又 } \because a_n \in T, \therefore d = -12m (m \in \mathbb{N}^*),$$

$$\therefore d = -24, \therefore a_n = 7 - 24n (n \in \mathbb{N}^*).$$

点评 本题与函数、圆锥曲线、导数等都联系上, 虽然它们不起决定性作用, 但用到时还是必须熟悉的. 否则, 对求解还是会存在很大威胁的. 实际上, 数列在日常生活中广为应用, 如增长率问题、银行存款利率问题、贷款问题等. 另外, 有些实际问题, 可转化为数列问题, 它们表面上看可能是解方程或是不等式问题.

热点八: 解答题建立在新定义的基础上考查创新知识的应用

例 9. 如果由数列 $\{a_n\}$ 生成的数列 $\{b_n\}$ 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $b_{n+1} < b_n$, 其中 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“Z 数列”.

(I) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_n = -n^2$, 试判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“Z 数列”;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 是“Z 数列”, $a_1 = 0, b_n = -n$, 求 a_n ;

(III) 若数列 $\{a_n\}$ 是“Z 数列”, 设 $s, t, m \in \mathbb{N}^*$, 且 $s < t$, 求证: $a_{s+m} - a_{s+m-1} < a_t - a_s$.

解析 (I) 因为 $a_n = -n^2$, 所以 $b_n = a_{n+1} - a_n = -(n+1)^2 + n^2 = -2n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{所以 } b_{n+1} - b_n = -2(n+1) - 1 + 2n + 1 = -2,$$

所以 $b_{n+1} < b_n$, 数列 $\{a_n\}$ 是“Z 数列”.

(II) 因为 $b_n = -n$,

$$\text{所以 } a_2 - a_1 = b_1 = -1, a_3 - a_2 = b_2 = -2, \cdots, a_n - a_{n-1} = b_{n-1} = -(n-1),$$

$$\text{所以 } a_n - a_1 = -1 - 2 - \cdots - (n-1) = -\frac{(n-1)n}{2} (n \geq 2), \text{ 所以 } a_n = -\frac{(n-1)n}{2} (n \geq 2), \text{ 又 } a_1 = 0, \text{ 所以 } a_n = -\frac{(n-1)n}{2} (n \in \mathbb{N}^*).$$

(III) 因为 $a_{s+m} - a_s = (a_{s+m} - a_{s+m-1}) + \cdots + (a_{s+1} - a_s) = b_{s+m-1} + \cdots + b_s$,

$$a_{t+m} - a_t = (a_{t+m} - a_{t+m-1}) + \cdots + (a_{t+1} - a_t) = b_{t+m-1} + \cdots + b_t,$$

又 $s, t, m \in \mathbb{N}^*$, 且 $s < t$, 所以 $s+i < t+i, b_{s+i} > b_{t+i}, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{所以 } b_{s+m-1} > b_{t+m-1}, b_{s+m-2} > b_{t+m-2}, \cdots, b_s > b_t,$$

$$\text{所以 } a_{t+m} - a_t < a_{s+m} - a_s, \text{ 即 } a_{t+m} - a_{s+m} < a_t - a_s.$$

关于数列的命题我们就谈这么多, 真正的试题到底是怎么样的题呢? 我们期待与这里说的热点一致.

(作者单位: 中山一中)

责任编辑 徐国坚

(上接第 19 页)

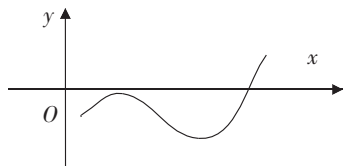


图 4

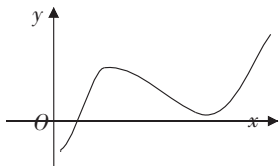


图 5

须 $h(1) = m - 7 < 0$ (图 4) 或 $h(3) = m + 6\ln 3 - 15 > 0$ (图 5), 即 $m < 7$ 或 $m > 15 - 6\ln 3$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像有且只有一个交点.

变式 1: 如果“函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像有且只有一个交点”变为“函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像有且只有两个不同交点”, 怎样解答呢?

变式 2: 如果“函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像有

且只有一个交点”变为“函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像有且只有三个不同交点”, 怎样解答呢?

点评 用导数探讨函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像的交点个数问题, 也是近年来高考考查的热点内容之一. 解题的主要步骤是: ①构造函数 $h(x) = g(x) - f(x)$; ②求导 $h'(x) = g'(x) - f'(x)$; ③研究函数 $h(x)$ 的单调性和极值 (必要时研究函数图像端点的极限情况); ④画出函数 $h(x)$ 的草图, 观察与 x 轴的交点情况, 列出相应的不等式 (组); ⑤解不等式 (组) 获解.

以上对函数、导数、不等式在 2014 年高考中的考点作了十个方面的预测. 这些试题很好地体现了函数、导数与不等式的联系, 以及解函数、导数与不等式问题的核心思想方法, 有一定的价值. 高考题无非是知识与思想方法的重新排列组合, 尽管我们无法猜到原题, 但万变不离其宗, 熟练把握了这十种题型, 可以在高考中以不变应万变.

(作者单位: 安徽省太湖中学)

责任编辑 徐国坚