

用数形结合思想方法解题时的常见错误分析

■童其林

作为一种数学思想方法,数形结合的应用大致又可分为两种情形:或者借助于数的精确性来阐明形的某些属性,或者借助形的几何直观性来阐明数之间某种关系,即数形结合包括两个方面:第一种情形是“以数解形”,而第二种情形是“以形助数”.“以数解形”就是有些图形太过于简单,直接观察却看不出什么规律来,这时就需要给图形赋值,如边长、角度等等,特别是在做选择题时,只有一个答案是正确答案,用此种方法就可能起到意想不到的效果.“以形助数”是指把抽象的数学语言转化为直观的图形,可避免繁杂的计算,获得出奇制胜的解法.“以形助数”中的“形”,或有形或无形.若有形,则可为图表与模型,若无形,则可另行构造或联想.因此“以形辅数”的途径大体有三种:一是运用图形;二是构造图形;三是借助于代数式的几何意义.但由于构造图形的误差,或者“无中生有”的不准确,有时可能会出现一些错误.本文就运用数形结合时容易出现的失误做个简单的归类分析,希望引起你的重视.

1. 潦草作图而导出的错误

在同一坐标系中作几个函数的图像来比较时,我们一定要注意函数图像的延伸趋势以及伸展“速度”.因为我们画出的只是函数图像的一小部分,而不是全部.常言到“知人知面不知心”,同样的,我们从函数图像的部分而知道它的全部,在没画出来的部分图像是怎么样的呢?我们只有根据函数图像的延伸趋势以及伸展“速度”来判断了.

例 1.判断命题“当 $a>1$ 时,关于 x 的方程 $a^x=\log_a x$ 无实数解”是否正确?

错解:在同一坐标系中,分别画出函数 $y=a^x$ ($a>1$) 及 $y=\log_a x$ ($a>1$) 的图像,如图 1 所示,可见它们没有公共点,所以方程确实无实数解,故命题正确.

剖析:实际上对不同的实数 a , $y=a^x$ 及 $y=\log_a x$ 的图像的延伸趋势不同,例如当 $a=2$ 时,原方程无实数解;而当 $a=\sqrt{2}$ 时, $x=2$ 便是原方程的

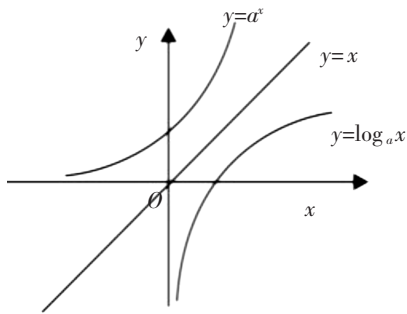


图1

解.上面的错解就是潦草作图,而画出了个有误差的图形,并且想当然地根据图形而不去注意函数图像的延伸趋势而造成的.

事实上,我们还可以通过几何画板的演示(参数 a 可动态控制),在同一坐标系中作出函数 $y=a^x$ 和函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$) 的图像,当 a 非常小时它们有三个交点,此时,方程 $a^x=\log_a x$ 解的有 3 个.

例 2.比较 2^n 与 n^2 (n 大于 1 的自然数) 的大小.

错解:在同一坐标系中分别画出函数 $y=2^x$ 及 $y=x^2$ 的图像,如图 2 所示,由图可知,两个图像有一个公共点.当 $x=2$ 时, $2^x=x^2$, 当 $x>2$ 时有 $2^x<x^2$ 成立,所以,当 $n=2$ 时 $2^n=n^2$, 而且当 n 是大于 2 的自然数时, $2^n<n^2$.

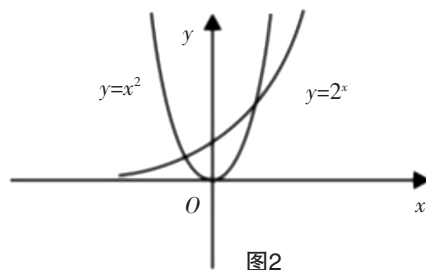


图2

剖析:事实上,当 $n=4$ 时, 2^n 与 n^2 , 也相等; $n=5$ 时, $2^n>n^2$. 错

解是因为没有充分注意到两图像的递增“速度”! 要比较两个图像的递增速度,确实很难由图像直观而得.本题可以先猜想,后用数学归纳法证明.本题的正确答案是 当 $n=2, 4$ 时 $2^n=n^2$, 当 $n=3$ 时, $2^n<n^2$, 当 n 是大于 4 的自然数时, $2^n>n^2$, 证明略.

例 3. (2013 年高考·福建卷,文 22 题改编) 已知函数 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$ ($a\in\mathbb{R}$, e 为自然对数的底数). 当 $a=1$ 时,若直线 $l: y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点,求 k 的最大值.

解析:由题意,方程 $kx-1=x-1+\frac{1}{e^x}$ 无解,显然 $x=0$ 不是方程的解,故分离参数后的方程 $k=1+\frac{1}{xe^x}$ 无解.令 $g(x)=1+\frac{1}{xe^x}$ ($x\neq 0$), 则 $g'(x)=\frac{-x-1}{x^2e^x}$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $x=-1$ 处取到极大值 $g(-1)=1-e$. 又当 $x\rightarrow 0^+$ 时, $g(x)\rightarrow +\infty$; 当 $x\rightarrow 0^-$ 时, $g(x)\rightarrow -\infty$; 当 $x\rightarrow +\infty$ 时, $g(x)\rightarrow 1$; 当 $x\rightarrow -\infty$ 时, $g(x)\rightarrow -\infty$, 即直线 $x=0$ 和 $y=1$ 是函数 $g(x)$ 的两条渐近线, 所以 $g(x)$ 的大致图像如图 3. 由题意知, 直线 $y=k$ 与函数 g