

(x) 的图像无交点, 观察图像易知, $k \in (1-e, 1]$, 故 $k_{\min}=1$.

点评: 本题为含参函数的零点问题, 解决这类问题的常用方法是分离参数之后转化为等式两边的函数图像是否有交点问题, 因此准确的作图至

关重要. 但考生在用导数法研究函数图像的变化趋势时, 通常只关注函数的单调性与极值, 而对函数图像是否存在渐近线意识淡薄, 因而常常造成作图错误. 本题中函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义, 考生通常仅将此点在函数图像上“挖空”, 表示函数图像在此处“中断”, 而不会意识到 $x=0$ 是函数图像的渐近线. 这是缺乏极限意识的表现. 因此, 要纠正上述错误, 须树立极限意识, 即在探明函数单调性之后, 还要对单调区间两端的“断点”处分别求极限, 以了解函数图像的走势与范围, 如此方可给图像以相对准确的定位, 避免作图的随意性.

2. 定义域扩大或缩小引起的错误

例 4. 设 $t>0$, 求点 $A(\frac{t}{10}+\frac{10}{t}, \frac{t}{10}-\frac{10}{t})$ 与点 $B(-1, 0)$ 之间距离的最小值.

解析: 由点 $A(\frac{t}{10}+\frac{10}{t}, \frac{t}{10}-\frac{10}{t})$ 可知点 A 的轨迹为 $x^2-y^2=4$, 如图 4 所示, 可知 $|AB|$ 的最小值为 1. 其实这是错误的, 原因就是忽视了变的量取值范围, 由 $t>0$ 知 $x \geq 2$, 正确的图像应该是图 5 的右图, 可知其最小值为 3.

点评: 定义域是一个变量的最大范围, 如果不注意转化过程是否是等价的过程, 那么变量的定义域就有可能扩大或缩小了, 这样, 画出来的图像就会多出一部分或者少了一角, 而根据这样有误差的图像, 做出来的结果是会不准确的, 那就是白做了这道题, 所以注意转化过程要等价是关键. 不论是否注意到转化过程要等价, 我们最好能做好一道题, 就再用另外一种方法验证一下所得到的答案是否准确, 这样才会有信心地保证做完一题就一定正确.

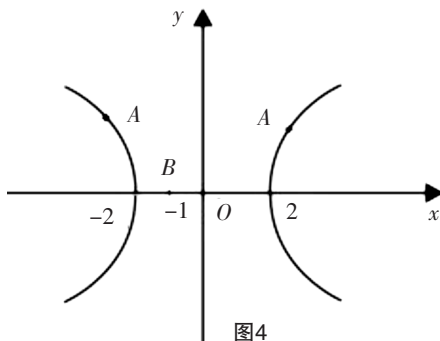


图4

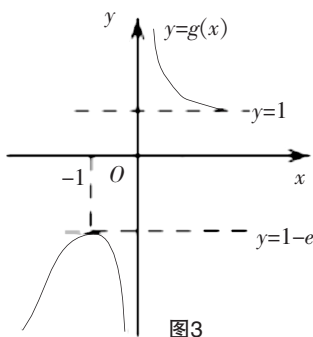


图3

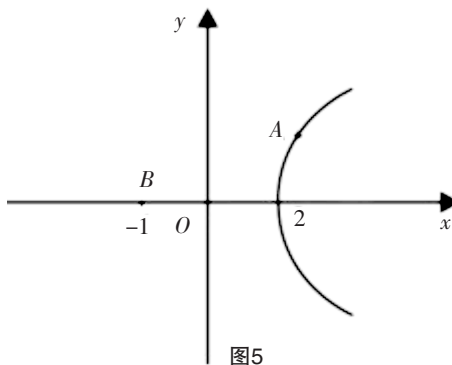


图5

3. “无中生有”引起的错误

例 5. 若圆 $(x-a)^2+y^2=4$ 与抛物线 $y^2=6x$ 没有公共点, 求 a 的取值范围.

错解: 由于圆的半径为 2, 当圆与抛物线外切时, $a=-2$, 于是, $a<-2$ 时, 圆与抛物线没有公共点.

当圆与抛物线内切时, 由

$$\begin{cases} (x-a)^2+y^2=4, \\ y^2=6x, \end{cases} \text{得:}$$

$$x^2-(2a-6)x+a^2-4=0 \cdots \text{①}$$

$$\Delta=(2a-6)^2-4(a^2-4)=0, \text{解得 } a=\frac{13}{6}. \text{ 所以 } a<-2 \text{ 或 } a \geq \frac{13}{6}.$$

剖析: 把 $a=\frac{13}{6}$ 代入方程①得 $3x^2+5x+\frac{25}{12}=0$, 此时, 解

为 $x=-\frac{5}{6}$ 是负根, 显然, 圆与抛物线不能内切. 所以圆内切于抛物线的情况根本不存在, 图中圆内切于抛物线是虚构的.

因此, 对 $x<0$, 可以用图形帮助解决 (如图 6), 而对 $x \geq 0$, 则需要用计算的方法.

当 $x \geq 0$ 时, 本题等价于圆心 $(a, 0)$ 到抛物线的距离 d 的最小值大于 2, 求 a 的取值范围.

$$d^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+6x=x^2-(2a-6)x+a^2=[x-(a-3)]^2+6a-9. \text{ 设 } f(x)=[x-(a-3)]^2+6a-9, (x \geq 0).$$

当 $a-3>0$, 即 $a>3$ 时, $f(a-3)$ 最小, 所以 $d_{\min}=\sqrt{6a-9}>2$, 解得 $a>\frac{13}{6}$, 考虑到 $a>3$, 所以 $a>3$.

当 $a-3 \leq 0$ 即 $a \leq 3$ 时, $f(0)$ 最小, 所以 $d_{\min}=a>2$, 此时为 $2<a \leq 3$.

综合以上, 得 $a>2$.

于是, 圆 $(x-a)^2+y^2=4$ 与抛物线 $y^2=6x$ 没有公共点时, a 的取值范围为 $a<-2$ 或 $a>2$.

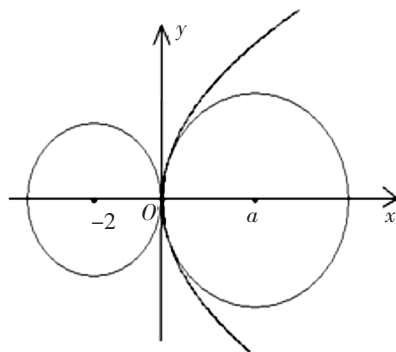


图6