4. 漏掉了一些可能的情形引起的错误

例 6. 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x^2-c^2,\end{cases}$（$a>b>0$，$c>0$）有四组实数解，求 a，b，c 应满足的关系.

错解： 原方程组有四组解等价于椭圆与抛物线有四个不同的公共点.如图 7 可知，$-c^2<-b$，且 $c<a$，即 $\sqrt{b}<c<a$.

剖析： 观察图像过于草率！事实上，上图 8 也是一种可能的情形，即当 $c^2\geqslant a$ 时，仍有可能为四组解，例如当 $a=2$，$b=1$，$c=2$ 时，可得解集为：$\{(2,0),(-2,0),(\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4}),(-\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4})\}$.现在用数形结合来求解：考虑一元二次方程 $\frac{y+c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $a^2y^2+b^2y+b^2$（c^2-a^2），令 $\triangle=0$（即相切情形），解得 $c=\frac{\sqrt{4a^4+b^2}}{2a}$，结合图像，注意到 $-c^2<-b$，则 a、b、c 应满足的关系是 $\sqrt{b}<c<\frac{\sqrt{4a^4+b^2}}{2a}$.

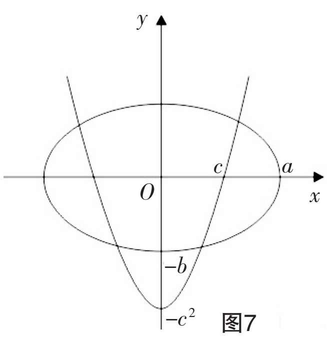

图7

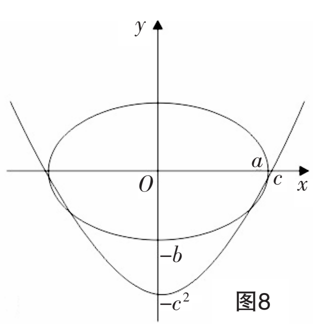

图8

例 7. 求曲线 $f(x)=-x^2+3x$ 过点 $A(2,-2)$ 的切线方程.

错解： ∵ 点 A 在曲线 $f(x)=-x^2+3x$ 上，且 $f'(x)=-3x^2+3$，∴ $f(2)=-9$.

故所求切线方程为 $y+2=-9(x-2)$，即 $9x+y-16=0$.

正解： 设切点为 $P(x_0,y_0)$，

∵ $f'(x)=-3x^2+3$，

∴ 在点 P 处的切线方程为 $y-y_0=(3-3x_0^2)(x-x_0)$.

又切线过点 A，

∴ $-2-(3x_0-x_0^3)=(3-3x_0^2)(2-x_0)$，

整理得 $x_0^3-3x_0^2+4=0$，即 $(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，

∴ $x_0=-1$ 或 $x_0=2$.

当 $x_0=-1$ 时，切线经过点 $P(-1,-2)$ 和 $A(2,-2)$，切线方程为 $y=-2$；当 $x_0=2$ 时，切线方程为 $9x+y-16=0$.

剖析： 本题遗漏了 $y=2$ 这条切线，失误的原因是把过点 A 的切线理解成在点 A 处曲线的切线.曲线在点 A 处的切线指的是切点在点 A 处的切线，而过点 A 的切线除了切点在点 A 处的曲线切线还可能存在切点不在点 A 处而经过点 A 的切线，两者是有区别的.因此，解题时必须理清头绪，分清这两个易混淆的概念.其实，“曲线在某点处的切线”不是“过曲线上某点的切线”充分必要条件，而是必要不充分条件.

5. 证明问题时逻辑循环引起的错误

“形”并不能作为证明的依据，遇到证明题时，在几何直观分析的同时，还要进行代数抽象的探索，并用严谨的数学语言写出证明过程的理论依据，这样才算做好证明题.应用数形结合时，“形”只是一种手段，一个工具，而不是理论依据.不论是怎么样的题目，“形”只是我们思考问题的种方式，为解题提供一些帮助，但我们都要写出我们做这道题的理论依据，这样才会让人知道你不是直接从图像中看出来的或者是猜测得到的，这样才有说服力，有是有效的.

例 8. 已知函数 $f(x)=x^2,x\in[0,+\infty)$，若 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，证明：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

错解： 不少考生这样做：画出函数 $f(x)=x^2,x\in[0,+\infty)$ 的图像，如图9，取点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$C(\frac{x_1+x_2}{2},f(\frac{x_1+x_2}{2}))$.显然弦 AB 在弧 AB 上方，所以弦 AB 的中点的高度大于 C 点的纵坐标，得证 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

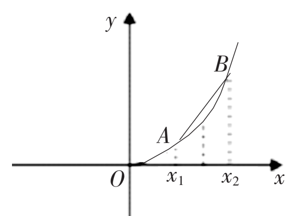

图9

剖析： 这里要证明的不等式，正是凹函数的定义，用凹函数的直观图形来证明不等式成立是一个逻辑循环，自己来证明自己.其实，用作差法即可证明.本题的定义域可改为全体实数也成立.

总之，数形结合的确是一个非常好，也非常实用而且重要的思想方法，应用性强.但它又是一把双刃剑，有诱惑也有陷阱.因此，我们在运用时，要注意利用“数”的精确性，注意数形转化的等价性，注意图形的全面性，在直观的同时，辅有严谨的演绎.

你来做做：

1. $y=\sin x$ 与 $y=\tan x,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的图像交点个数有（　）

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

2. 方程 $x^{\frac{1}{3}}=2\sin x$ 的解的个数是（　）

A. 6 个　B. 7 个　C. 8 个　D. 9 个

3.（2013 北京卷，理科 8）设关于 x，y 的不等式组 $\begin{cases}2x-y+1>0,\\ x+m<0,\\ y-m>0\end{cases}$ 表示的平面区域内存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $x_0-2y_0=2$，求得 m 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-\frac{4}{3})$　B. $(-\infty,\frac{1}{3})$　C. $(-\infty,-\frac{2}{3})$　D. $(-\infty,-\frac{5}{3})$

4. 当 $x\in(1,2)$ 时不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　）