高考不等式专题复习

■洪其强

一、复习指南

1. 在复习中要注意扎扎实实地掌握基础知识和基本方法，特别是要掌握不等式的性质和等价转化的原则，它是学好本章内容的关键，证明不等式没有固定的模式可套，它方法灵活，技巧性强，因此在复习中除掌握比较法、分析法、综合法这三种基本方法外，还应了解其它的证明方法，并不断总结证明不等式的规律和技巧，提高数学能力.

2. 强化本章常用的数学思想方法的复习.①等价转化的思想：如在不等式的同解变形过程中等价转化思想起重要作用，解不等式的过程实质上就是利用不等式的性质进行等价转化的过程.②分类讨论的思想：如求解含参数的不等式问题，一般要对参数进行分类讨论，在复习时，应学会分析引起分类讨论的原因，合理地分类，做到不重不漏.③函数与方程思想：不等式与函数、方程三者相互联系、相互转化，如求参数的取值范围问题，函数与方程的思想是解决这类问题的重要方法.④化归思想：证明不等式就是将已知条件转化为要证的结论，这体现了化归思想的重要性，其中不仅考查基础知识，而且能考查出考生分析问题和解决问题的能力.

3. 在复习时应强化不等式的应用，提高应用意识.历届高考题中除单独考查不等式的试题外，常在一些函数、数列、立体几何、解析几何和实际应用的问题中涉及不等式，如在实际问题中，主要有构造不等式求解或构造函数求最值，求最值时要注意等号成立的条件.因此，在复习过程中，一定要提高应用意识，不断总结不等式的应用规律，努力提高数学能力.

二、典题选析

题型 1. 利用不等式性质求取值范围.

例 1. 若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9,\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为 __________.

分析： 利用不等式性质求某些代数式的取值范围时，应注意两点：一是必须严格运用不等式的性质；二是在多次运用不等式的性质时有可能扩大了变量的取值范围，要特别注意.

解析： 令 $z=x-2y=\lambda(2x+y)+\mu(x-y)=(2\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y$，

$\therefore \begin{cases}2\lambda+\mu=1,\\ \lambda-\mu=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{3},\\ \mu=\dfrac{5}{3},\end{cases}$

$\therefore z=-\dfrac{1}{3}(2x+y)+\dfrac{5}{3}(x-y)$.

又 $\because 3\leqslant 2x+y\leqslant 9$，$6\leqslant x-y\leqslant 9$，

$\therefore 7\leqslant -\dfrac{1}{3}(2x+y)+\dfrac{5}{3}(x-y)\leqslant 14$，即 $7\leqslant z\leqslant 14$，

$\therefore z_{min}=7$.

点评： 本题也可用线性规划求解，但题中 x，y 相互制约，不可分割，先待定系数法建立待求范围的整体与已知范围的整体的等量关系，最后通过“一次性”不等关系的运算求得待求整体的范围是避免错误的一条途径.

题型 2. 三个“二次”间的关系

例 2. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b\,(a,b\in R)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，若关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 的解集为 $(m,m+6)$，则实数 c 的值为 __________.

分析： 由题意知 $f(x)=x^2+ax+b=(x+\dfrac{a}{2})^2+b-\dfrac{a^2}{4}$.

$\because f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，$\therefore b-\dfrac{a^2}{4}=0$，即 $b=\dfrac{a^2}{4}$.

$\therefore f(x)=(x+\dfrac{a}{2})^2$.

又 $\because f(x)<c$，$\therefore (x+\dfrac{a}{2})^2<c$，即 $-\dfrac{a}{2}-\sqrt{c}<x<-\dfrac{a}{2}+\sqrt{c}$.

$\therefore \begin{cases}-\dfrac{a}{2}-\sqrt{c}=m, & ①\\ -\dfrac{a}{2}+\sqrt{c}=m+6, & ②\end{cases}$

②−①，得 $2\sqrt{c}=6$，$\therefore c=9$.

点评： 二次函数、一元二次不等式、一元二次方程之间有着密切关系.（1）一元二次不等式解集的端点就是对应的一元二次方程的解;(2) 不等式的解集结构与二次项系数有直接的关系;(3) 二次函数的图像能直观反映一元二次不等式解集的情况.

题型 3. 破解一元二次不等式恒成立问题

例 3. 在实数集上定义运算$\ominus$：$x\ominus y=x(1-y)$，若不等式 $(x-a)\ominus(x+a)<1$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是 __________.

分析： 由题意知 $(x-a)\ominus(x+a)=(x-a)(1-x-a)=-x^2+x+a^2-a$.

故 $-x^2+x+a^2-a<1$ 对任意 $x\in R$ 都成立.

即 $-x^2+x<-a^2+a+1$ 对任意 $x\in R$ 都成立.

而 $-x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{4}$，$\therefore -a^2+a+1>\dfrac{1}{4}$，即 $4a^2-4a-3<0$，解得 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$，

故所求 a 的取值范围为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$.