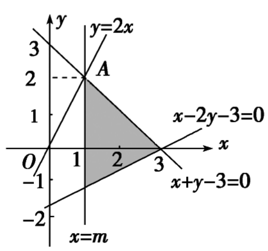
题型 4. 求解线性规划中的参数问题

例 4. 若直线 $y=2x$ 上存在点 (x,y) 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-3\leqslant 0,\\ x-2y-3\leqslant 0,\\ x\geqslant m,\end{cases}$ 则实数 m 的最大值为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

分析：（1）利用条件作出直线 $y=2x$, $x+y-3=0$, $x-2y-3=0$.(2)由图形知，当直线 $x=m$ 过点 $A(1,2)$(即直线 $y=2x$ 和 $x+y-3=0$ 的交点)时满足条件.

解析：



首先作出约束条件 $\begin{cases}x+y-3\leqslant 0,\\ x-2y-3\leqslant 0,\\ x\geqslant m\end{cases}$ 对应的可行域及直线 $y=2x$，

如图，易知直线 $x=m$ 过点 $A(1,2)$时符合题意，即此时 $x=m=1$ 为 m 的最大值.

点评：解决含参数的线性规划问题时应掌握：（1）解题时要看清题目，不能忽视或漏掉参数的范围；（2）对于题目中最值条件的确定至关重要，且不能计算出错.

题型 5. 利用基本不等式解决实际问题

对于应用题要通过阅读，理解所给定的材料，寻找量与量之间的内在联系，抽象出事物系统的主要特征与关系，建立起能反映其本质属性的数学结构，从而建立起数学模型，然后利用不等式的知识求出题中的问题。

例 5. 某食品厂定期购买面粉，已知该厂每天需要面粉 6 吨，每吨面粉的价格为 1 800 元，面粉的保管等其他费用为平均每吨每天 3 元，购买面粉每次需支付运费 900 元.

（1）求该厂多少天购买一次面粉，才能使平均每天所支付的总费用最少？

（2）若提供面粉的公司规定：当一次购买面粉不少于 210 吨时，其价格可享受 9 折优惠（即原价的 90%），问该厂是否考虑利用此优惠条件？请说明理由.

分析：（1）利用基本不等式解决实际问题时，应先仔细阅读题目信息，理解题意，明确其中的数量关系，并引入变量，依题意列出相应的函数关系式，然后用基本不等式求解.

（2）求所列函数的最值，若用基本不等式时，等号取不到，可利用函数单调性求解.

解析：（1）设该厂应每隔 x 天购买一次面粉，其购买量为 $6x$ 吨.由题意知，面粉的保管等其他费用为 $3[6x+6(x-1)+\cdots+6\times 2+6\times 1]=9x(x+1)$.

设平均每天所支付的总费用为 y_1 元，则 $y_1=\frac{1}{x}[9x(x+1)+900]+6\times 1800=\frac{900}{x}+9x+10809\geqslant 2\sqrt{\frac{900}{x}\cdot 9x}+10\,989=10\,989$，当且仅当 $9x=\frac{900}{x}$，即 $x=10$ 时取等号，

即该厂应每隔 10 天购买一次面粉，才能使平均每天所支付的总费用最少.

（2）若厂家利用此优惠条件后，则至少每隔 35 天购买一次面粉.

设该厂利用此优惠条件，每隔 $x(x\geqslant 35)$天购买一次面粉，平均每天支付的总费用为 y_2 元，则 $y_2=\frac{1}{x}[9x(x+1)+900]+6\times 1800\times 0.9=\frac{900}{x}+9x+9\,729(x\geqslant 35)$.

令 $f(x)=x+\frac{100}{x}(x\geqslant 35)$, $x_2>x_1\geqslant 35$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\frac{100}{x_1})-(x_2+\frac{100}{x_2})=\frac{(x_2-x_1)(100-x_1x_2)}{x_1x_2}$.

$\because x_2>x_1\geqslant 35$, $\therefore x_2-x_1>0$, $x_1x_2>0$，$100-x_1x_2<0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$, $f(x_1)<f(x_2)$, 即 $f(x)=x+\frac{100}{x}$, 当 $x\geqslant 35$ 时为增函数.

$\therefore$ 当 $x=35$ 时，$f(x)$有最小值，此时 $y_2<10\,989$，

$\therefore$ 该厂应接受此优惠条件.

点评：利用基本不等式求最值时，一定要注意应用基本不等式成立的条件：即一正，二定，三相等，否则求解时会出现等号成立的条件不具备而出错.若在同一题目中，两次或两次以上利用基本不等式，等号应同时成立.

题型 6. 绝对值三角不等式性质定理的应用

例 6.“$|x-a|<m$，且$|y-a|<m$”是“$|x-y|<2m$”（x，y，a，$m\in\mathrm{R}$）的（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 非充分非必要条件

分析：利用绝对值三角不等式，推证$|x-a|<m$，且$|y-a|<m$与$|x-y|<2m$的关系即得答案.

解析：选 A.

$\because |x-y|=|(x-a)-(y-a)|\leqslant|x-a|+|y-a|<m+m=2m$.

$\therefore |x-a|<m$，且$|y-a|<m$ 是$|x-y|<2m$ 的充分条件.

取 $x=3$，$y=1$，$a=-2$，$m=2.5$，则有$|x-y|=2<5=2m$，但$|x-a|=5$，不满足$|x-a|<m=2.5$，

故$|x-a|<m$ 且$|y-a|<m$ 不是$|x-y|<2m$ 的必要条件.

点评：（1）对绝对值三角不等式定理$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$中等号成立的条件要深刻理解，特别是用此定理求函数的最值时.