

(2) 该定理可以强化为: $||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$, 它经常用于证明含绝对值的不等式.

(3) 对于求 $y=|x-a|+|x-b|$ 或 $y=|x+a|-|x-b|$ 型的最值问题利用绝对值三角不等式更简捷、方便.

题型 7. 绝对值不等式的解法

例 7. 解下列不等式:

- (1) $1 < |x-2| \leq 3$;
- (2) $|2x+5| > 7+x$;
- (3) $|x^2-9| \leq x+3$;
- (4) $|x-1|+|x-2| < 5$.

分析: (1) 利用公式或平方法转化为不含绝对值的不等式; (2) 利用公式法转化为不含绝对值的不等式; (3) 利用绝对值的定义或 $|f(x)| \leq a (a>0) \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a$ 去掉绝对值符号或利用数形结合思想求解; (4) 不等式的左边含有绝对值符号, 要同时去掉这两个绝对值符号, 可以采用“零点分段法”, 此题亦可利用绝对值的几何意义去解.

解析: (1) 原不等式等价于不等式组 $\begin{cases} |x-2| > 1, \\ |x-2| \leq 3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x < 1 \text{ 或 } x > 3, \\ -1 \leq x \leq 5, \end{cases}$

解得 $-1 \leq x < 1$ 或 $3 < x \leq 5$,

所以原不等式的解集为 $\{x | -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 5\}$.

(2) 由不等式 $|2x+5| > 7+x$,

可得 $\begin{cases} 2x+5 \geq 0, \\ 2x+5 > 7+x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x+5 < 0, \\ 2x+5 < -(7+x), \end{cases}$ 解得 $x > 2$ 或 $x < -4$.

$\therefore$ 原不等式的解集是 $\{x | x < -4 \text{ 或 } x > 2\}$

(3) 原不等式 $\Leftrightarrow$ ① $\begin{cases} x^2-9 \geq 0, \\ x^2-9 \leq x+3 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x^2-9 < 0, \\ 9-x^2 \leq x+3 \end{cases}$

不等式① $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 3, \\ -3 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4$.

不等式② $\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 4, \\ x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.

$\therefore$ 原不等式的解集是 $\{x | 2 \leq x \leq 4 \text{ 或 } x = -3\}$.

(4) 分别求 $|x-1|$, $|x+2|$ 的零点, 即 1, -2. 由 -2, 1 把数轴分成三部分: $x < -2$, $-2 \leq x \leq 1$, $x > 1$.

当 $x < -2$ 时, 原不等式即 $1-x-2-x < 5$, 解得 $-3 < x < -2$;

当 $-2 \leq x \leq 1$ 时, 原不等式即 $1-x+2+x < 5$, 因为 $3 < 5$ 恒成立, 则 $-2 \leq x \leq 1$;

当 $x > 1$ 时, 原不等式即 $x-1+2+x < 5$, 解得 $1 < x < 2$.

综上, 原不等式的解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$.

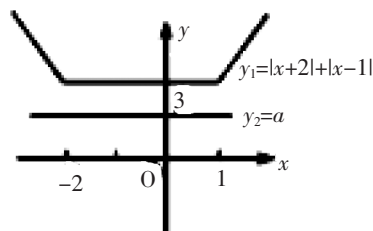
点评: (1) 形如 $|x-a| \pm |x-b| \geq c$ 不等式的解法常用零点分段讨论法, 其步骤为: ①求零点; ②划分区间、去绝对值号; ③分别解去掉绝对值的不等式; ④取每个结果的并集, 特别注意在分段时不要漏掉区间的端点值. (2) 上述不等式也可用 $|x-a_1| \pm |x-a_2|$ 的几何意义去求解集.

题型 8. 含参数的绝对值不等式

例 8. 若关于 x 的不等式 $|x+2|+|x-1| \leq a$ 的解集为 Φ , 求实

数 a 的取值范围.

分析: 把不等式问题转化为函数的图像, 利用数形结合思想求解; 也可以运用绝对值的几何意义求解.



解析: 令 $y_1 = |x+2| + |x-1|$, $y_2 = a$, $\therefore y_1 = \begin{cases} 2x+1, & (x \geq 1) \\ 3, & (-2 \leq x < 1) \\ -2x-1, & (x < -2) \end{cases}$

y_1 , y_2 的图像如图所示.

由图可知, 当 $a < 3$ 时, $|x+2|+|x-1| \leq a$ 的解集为 Φ .

题型 9. 绝对值不等式的综合问题

例 9. 已知 a , b , c 是实数, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ax + b$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$.

(1) 证明: $|c| \leq 1$;

(2) 证明: 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 2$;

(3) 设 $a > 0$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $g(x)$ 的最大值是 2, 求 $f(x)$.

分析: (1) 代入 $x=0$ 即得; (2) 结合一次函数的单调性和绝对值不等式的性质得证; (3) 结合二次函数的图像和一次函数的最值求解.

解析: (1) 由已知, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$, 取 $x=0$, 得 $|c| = |f(0)| \leq 1$, 即 $|c| \leq 1$.

(2) 当 $a > 0$ 时, $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 所以 $g(-1) \leq g(x) \leq g(1)$,

因为 $|f(x)| \leq 1 (-1 \leq x \leq 1)$, $|c| \leq 1$, 所以 $g(1) = a+b = f(1)-c \leq |f(1)|+|c| \leq 2$.

$g(1) = -a+b = -f(-1)+c \geq -(|f(-1)|+|c|) \geq -2$.

由此可得 $|g(x)| \leq 2$;

当 $a < 0$ 时, $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数, 所以 $g(-1) \geq g(x) \geq g(1)$,

因为 $|f(x)| \leq 1 (-1 \leq x \leq 1)$, $|c| \leq 1$, 所以 $g(-1) = -a+b = -f(-1)+c \leq |f(-1)|+|c| \leq 2$.

$g(1) = a+b = f(1)-c \geq -(|f(1)|+|c|) \geq -2$. 由此得 $|g(x)| \leq 2$;

当 $a=0$ 时, $g(x)=b$, $f(x)=bx+c$, 因为 $-1 \leq x \leq 1$.

所以 $g(x) = |f(1)-c| \leq |f(1)|+|c| \leq 2$.

综上, 得 $|g(x)| \leq 2$.

(3) 因为 $a > 0$, $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 当 $x=1$ 时取得最大值 2.

即 $g(1) = a+b = f(1)-f(0) = 2$,

因为 $-1 \leq f(0) = f(1)-2 \leq 1-2 = -1$, 所以 $c = f(0) = -1$.

因为当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq -1$, 即 $f(x) \geq f(0)$.

根据二次函数性质, 直线 $x=0$ 为二次函数 $f(x)$ 的图象的对称轴.

所以 $-\frac{b}{2a} = 0$, 即 $b=0$, $a=2$,

故有 $f(x) = 2x^2 - 1$.