题型 10. 不等式与函数的综合题

不等式与函数的综合题，是高考的常考题型，如求函数的定义域、值域，求参数的取值范围，与函数有关的不等式证明等，解决此类综合题，要充分运用函数的单调性，注意函数的定义域，并结合函数的奇偶性、周期性一起讨论.

例 10. 已知$f(x)$是定义在［-1，1］上的奇函数，且$f(1)=1$，若m、$n\in$［-1，1］，$m+n\neq 0$时$\frac{f(m)+f(n)}{m+n}>0$.

（1）用定义证明$f(x)$在$[-1,1]$上是增函数；

（2）解不等式 $f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$；

(3)若$f(x)\leqslant t^2-2at+1$对所有$x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$恒成立，求实数t的取值范围.

分析：（1）问单调性的证明，利用奇偶性灵活变通使用已知条件不等式是关键，(3)问利用单调性把$f(x)$转化成“1”是点睛之笔.

解析：（1）任取$x_1<x_2$，且x_1，$x_2\in$［-1，1］，

则$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}\cdot(x_1-x_2)$.

$\because -1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，

$\therefore x_1+(-x_2)\neq 0$，由已知$\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}>0$，又$x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x)$在$[-1,1]$上为增函数.

（2）$\because f(x)$在$[-1,1]$上为增函数，

$$\therefore\begin{cases}-1\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1,\\ -1\leqslant \frac{1}{x-1}\leqslant 1,\\ x+\frac{1}{2}<\frac{1}{x-1},\end{cases}\text{解得}\{x|-\frac{3}{2}\leqslant x<-1,\ x\in\mathbf{R}\}.$$

（3）由（1）可知$f(x)$在$[-1,1]$上为增函数，且$f(1)=1$，

故对$x\in$［-1，1］，恒有$f(x)\leqslant 1$.

所以要使$f(x)\leqslant t^2-2at+1$对所有$x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$恒成立，即要t^2-$2at+1\geqslant 1$成立，

故$t^2-2at\geqslant 0$，记$g(a)=t^2-2at$，对$a\in[-1,1]$，有$g(a)\geqslant 0$，

只需$g(a)$在［-1，1］上的最小值大于等于0，

$g(-1)\geqslant 0$，$g(1)\geqslant 0$，

解得$t\leqslant -2$或$t=0$或$t\geqslant 2$.

$\therefore t$的取值范围是$\{t|t\leqslant -2$或$t=0$或$t\geqslant 2\}$.

点评：本题是一道函数与不等式相结合的题目，考查考生的分析能力与化归能力 它主要涉及函数的单调性与奇偶性，而单调性贯穿始终，把所求问题分解转化，是函数中的热点问题；问题(2)(3)要求的都是变量的取值范围，不等式的思想起到了关键作用

题型 11. 不等式与数列的综合题

不等式与数列的综合题，一般来说多是证明题，要熟悉不等式的常用证明方法，特别是比较法、综合法、分析法、数学归纳法等，也可利用函数的思想.

例 11. 数列$\{x_n\}$由下列条件确定：$x_1=a>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，$n\in\mathbf{N}$.

（Ⅰ）证明：对$n\geqslant 2$，总有$x_n\geqslant\sqrt{a}$；

（Ⅱ）证明：对$n\geqslant 2$，总有$x_n\geqslant x_{n+1}$；

分析：（Ⅰ）证明：由$x_1=a>0$，及$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，可归纳证明$x_n>0$.

从而有$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$ $(n\in\mathbf{N})$（均值不等式的应用—综合法），

所以，当$n\geqslant 2$时，$x_n\geqslant\sqrt{a}$成立.

（Ⅱ）法一（作差比较法）：当$n\geqslant 2$时，因为$x_n\geqslant\sqrt{a}>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，

所以$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-x_n^2}{x_n}\leqslant 0$，

当$n\geqslant 2$时，$x_n\geqslant x_{n+1}$成立.

法二（作商比较法）：当$n\geqslant 2$时，因为$x_n\geqslant\sqrt{a}>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，

所以$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})}{x_n}=\frac{x_n^2+a}{2x_n^2}\leqslant\frac{x_n^2+x_n^2}{2x_n^2}=1$，

故当$n\geqslant 2$时，成立$x_n\geqslant x_{n+1}$.

点评：此题是以数列为知识背景，把数列与不等式证明综合起来，重点还是考查不等式证明方法中最基本的方法——综合法和比较法.

题型 12. 含有参数的不等式问题

含有参数的不等式问题是高考常考题型，求解过程中要利用不等式的性质将不等式进行变形转化，化为一元二次不等式等问题去解决，注意参数在转化过程中对问题的影响.

例 12. 已知$f(x)=\lg(x+1)$，$g(x)=2\lg(2x+t)$ $(t\in\mathbf{R}$，t是参数$)$.

（1）当$t=-1$时，解不等式：$f(x)\leqslant g(x)$；

（2）如果当$x\in[0,1]$时，$f(x)\leqslant g(x)$恒成立，求参数t的取值范围.

分析：将对数方程转化为不含对数的方程，在转化过程中要注意定义域.

解析：（1）$t=-1$时，$f(x)\leqslant g(x)$，即为$\lg(x+1)\leqslant 2\lg(2x-1)$，

此不等式等价于$\begin{cases}x+1>0,\\2x-1>0,\\x+1\leqslant(2x-1)^2,\end{cases}$ 解得$x\geqslant\frac{5}{4}$，

$\therefore$原不等式的解集为$\{x|x\geqslant\frac{5}{4}\}$.

(2) $x\in[0,1]$时，$f(x)\leqslant g(x)$恒成立，