

圆锥曲线中一类斜率关系题

■俞新龙

在最近一段时间的复习中,经常遇到圆锥曲线中一类斜率关系题,从同学们答题的情况看,掌握的不理想,下面,我们通过四道典型问题一起来集中突破.

(注:每题第(1)问请同学们自行求解.)

例 1. 已知抛物线 $C: y = ax^2$ 过点 $P(4, 4)$.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 设点 A, B 在抛物线 C 上, 直线 PA, PB 的斜率分别为 K_1, K_2 , 且 $k_2 - k_1 = 1$, 若 $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle AOB$ 的面积 2 倍 (O 为坐标原点), 求直线 PA 的方程.

解析: (I) $a = \frac{1}{4}$.

$$\therefore x \in [0, 1] \text{ 时, } \begin{cases} x+1 > 0, \\ 2x+t > 0, \\ x+1 \leq (2x+1)^2, \end{cases} \quad \text{恒成立,}$$

$$\therefore x \in [0, 1] \text{ 时, } \begin{cases} x+1 > 0 \\ t > -2x \\ t \geq -2x + \sqrt{x+1} \end{cases} \quad \text{恒成立,}$$

即 $x \in [0, 1]$ 时, $t \geq -2x + \sqrt{x+1}$ 恒成立, 于是转化为求 $-2x + \sqrt{x+1}$ ($x \in [0, 1]$) 的最大值问题.

令 $u = \sqrt{x+1}$, 则 $x = u^2 - 1$, 由 $x \in [0, 1]$, 知 $u \in [1, \sqrt{2}]$.

$$\therefore -2x + \sqrt{x+1} = -2(u^2 - 1) + u = -2(u - \frac{1}{4})^2 + \frac{17}{8}.$$

当 $u=1$ 时, 即 $x=0$ 时, $-2x + \sqrt{x+1}$ 有最大值为 1.

$\therefore t$ 的取值范围是 $t \geq 1$.

点评: 对于含参数问题, 常常用分类讨论的方法; 而恒成立问题, 除了运用分类讨论的方法外, 还可采用分离参数的方法.

三、专题复习小结

1. 不等式与函数的综合题, 如求函数的定义域、值域, 求参数的取值范围, 与函数有关的不等式证明等, 解决此类综合题, 要充分运用函数的单调性, 注意函数的定义域, 并结合函数的奇偶性、周期性一起讨论.

2. 不等式与数列的综合题, 一般来说多是证明题, 要熟悉不等式的常用证明方法, 特别是比较法、综合法、分析法、数学归纳法等, 也可利用函数的思想.

3. 含有参数的不等式问题, 求解过程中要利用不等式的性质将不等式进行变形转化, 化为一元二次不等式等问题去解决, 注意参数在转化过程中对问题的影响.

4. 对于应用题要通过阅读, 理解所给定的材料, 寻找量与量之间的内在联系, 抽象出事物系统的主要特征与关系, 建立起能反映其本质属性的数学结构, 从而建立起数学模型, 然后利用不等式的知识求出题中的问题.

四、专题复习预测

不等式是中学数学的基础和重要部分, 是高等数学的重要工具, 它可以渗透到中学数学的很多章节, 加之它在实际生活中的广泛应用, 决定了它将是永不衰退的高考热点.

1. 本章考查的主要内容有不等式的性质、不等式的证明、不等式的解法、含绝对值的不等式以及不等式的应用, 考查的基本数学方法和数学思想主要有: 比较法、分析法、综合法和等价转化、分类讨论的数学思想.

2. 在题型方面主要是选择题和解答题, 选择题中常考查不等式的性质、比较大小、解简单的不等式及不等式的简单应用; 在解答题中, 主要考查: 解不等式 (特别是对含参数的不等式进行分类讨论)、不等式在实际生活中的应用、用不等式研究函数性质、方程根的讨论. 从难度上看, 基础题、中档题、高档题均有可能在考题中出现.

3. 在考查基础知识的同时, 将会考查考生的数学能力, 特别是逻辑推理能力. 命题时往往将不等式与解析几何、代数中的函数、数列、三角进行综合出题, 这类问题立意新颖, 抽象程度高, 能很好地考查学生的直觉思维能力、逻辑推理能力和数学素养, 一般以压轴题的形式出现.

6. 从高考内容上来看, 不等关系、不等式的性质及应用、一元二次不等式的解法及三个二次间的关系问题、求二元一次不等式 (组) 表示的平面区域的面积问题、求目标函数的最值及简单的线性规划实际应用问题、利用基本不等式求最值问题是命题的热点.

7. 着重突出考查对不等式性质的灵活运用、二次不等式的解法、平面区域的画法及目标函数最值. 客观题突出变形的灵活性, 主观题在考查基本运算能力的同时又着重考查数形结合思想、化归转化思想、分类讨论思想的应用, 有时与重要性的判断交汇命题.

(作者单位: 贵州省龙里中学)

责任编辑 徐国坚