(II)在改卷中,我们发现同学们知道是根据面积关系建立等式,但如何把斜率关系用起来却成为了问题.其实,斜率关系可以直接用,也可以简接用.

直接用:要求直线 PA 方程,还缺其斜率 k_1,故我们可以通过联立方程求交点,并通过两斜率的关系统一化为同一变量 k_1,再将面积关系转化出等式求解 k_1.

联立直线 PA 与抛物线 C 方程 $\begin{cases} y=k_1(x-4)+4, \\ y=\frac{1}{4}x^2, \end{cases}$ 得 $x^2-4k_1x+16k_1-16=0$,

解得 $x=4$ 或 $x=4k_1-4$,所以点 A 的坐标为 $(4k_1-4,4(k_1-1)^2)$,

同理,点 B 的坐标为 $(4k_2-4,4(k_2-1)^2)$,因为 $k_2=k_1+1$,所以 $B(4k_1,4k_1^2)$.

于是可得直线 OA 方程为 $y=(k_1-1)x$,从而由点到直线的距离公式得,点 P 到直线 OA 的距离 $d_1=\frac{4|k_1-2|}{\sqrt{1+(k_1-1)^2}}$,点 B 到直线 OA 的距离 $d_2=\frac{4|k_1|}{\sqrt{1+(k_1-1)^2}}$.

根据 $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle AOB$ 的面积的 2 倍,知 $d_1=2d_2$,故 $|k_1-2|=2|k_1|$,

解得 $k_1=-2$ 或 $k_1=\frac{2}{3}$,所以直线 PA 的方程为 $2x+y-12=0$ 或 $2x-3y+4=0$.

间接用:要求直线 PA 方程,还可以通过求 A 点坐标 $(x_1,\frac{1}{4}x_1^2)$.可以通过 k_1、k_2 斜率关系和面积关系求解 x_1.

设 $A(x_1,\frac{1}{4}x_1^2)$,$B(x_2,\frac{1}{4}x_2^2)$,则 $k_1=\frac{\frac{1}{4}x_1^2-4}{x_1-4}=\frac{1}{4}(x_1+4)$,

同理 $k_2=\frac{1}{4}(x_2+4)$,所以由 $k_2-k_1=1$ 可得 $x_2-x_1=4$.

因为直线 OA 方程为 $y=\frac{1}{4}x_1x$,即 $x_1x-4y=0$,所以点 P 到直线 OA 的距离 $d_1=\frac{4|x_1+4|}{\sqrt{16+x_1^2}}$,

同理点 B 到直线 OA 的距离 $d_2=\frac{|x_1x_2-x_2^2|}{\sqrt{16+x_1^2}}=\frac{4|x_2|}{\sqrt{16+x_1^2}}=\frac{4|x_1+4|}{\sqrt{16+x_1^2}}$.

根据 $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle AOB$ 的面积的 2 倍知 $d_1=2d_2$,即 $|x_1-4|=2|x_1+4|$,

解得 $x_1=-12$ 或 $x_1=-\frac{4}{3}$,从而 $k_1=-2$ 或 $k_1=\frac{2}{3}$,

所以直线 PA 的方程为 $2x+y-12=0$ 或 $2x-3y+4=0$.

例 2. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点和短轴的两个端点构成边长为 2 的正方形.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)过点 $Q(1,0)$ 的直线线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点.点 $P(4,3)$),记直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2,当 k_1,k_2 最大时,求直线线 l 的方程.

解析:(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)该题有大部分同学对第(2)问无法入手解答,还有一部分在得到 k_1,k_2 表达式后不能再求解下去了.其实,该题还是可以通过直线与圆锥曲线相交问题的常规解法做下去的.

①当直线 l 斜率不存在时,方程为 $x=1$,得 $A(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$,$B(1,-\frac{\sqrt{6}}{2})$,所以可得 $k_1\cdot k_2=\frac{5}{6}$.

②设直线 l 斜率为 k,联立直线与椭圆方程 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$

得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{2k^2-4}{1+2k^2}$,所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{-2k}{1+2k^2}$,$y_1+y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=\frac{-3k^2}{1+2k^2}$.

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{3-y_1}{4-x_1}\cdot\frac{3-y_2}{4-x_2}=\frac{9-3(y_1+y_2)+y_1y_2}{16-4(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}$.

接下去就是求 $y=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}$ 的最大值,一般有以下几种方法.

解法 1:(基本不等式法)$y=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}=\frac{5}{6}+\frac{2k-\frac{1}{3}}{6k^2+4}=\frac{5}{6}+\frac{1}{\frac{3}{2}(2k-\frac{1}{3})+\frac{25}{6}\cdot\frac{1}{2k-\frac{1}{3}}+1}\leqslant\frac{5}{6}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}(2k-\frac{1}{3})\cdot\frac{25}{6}\cdot\frac{1}{2k-\frac{1}{3}}}+1}=1$,当且仅当 $2k-\frac{1}{3}>0$ 且 $\frac{3}{2}(2k-\frac{1}{3})=\frac{25}{6}\cdot\frac{1}{2k-\frac{1}{3}}$,即 $k=1$ 时取等号.

注意:该解法中取不等式时要注意 $2k-\frac{1}{3}>0$,否则就不符合使用基本不等式的条件.

解法 2:(导数法)$y'=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}=\frac{-4(3k+2)(k-1)}{(6k^2+4)^2}$,

所以函数 $y=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}$ 在 $(-\infty,-\frac{2}{3})$ 递减,$(-\frac{2}{3},1)$ 递增,$(1,+\infty)$ 递减.

至此,同学们不免产生疑问:函数不存在最大值啊?

其实,这也是导数法中必须要解决的问题,事实上,对于函数 $y=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}$ 来讲,不管 k 是趋向于 $+\infty$ 还是 k 趋向于 $-\infty$,y 均趋向于 $\frac{5}{6}$,而因为 $k=1$ 时 $y=1$,故最大值为 $y=1$.

解法 3:(值域法)一般地,如果函数的值域知道了,则函数的最值就也知道了.所以我们可以用 $\triangle$ 判别法来求 $y=$