

$\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}$ 的值域.

化简整理得 $(6y-5)k^2-2k+4y-3=0$ (*)

① $6y-5=0$ 即 $y=\frac{5}{6}$ 时, $k=\frac{1}{6}$, 符合;

② $6y-5 \neq 0$ 时, 方程 (*) 有解, 所以判别式 $\Delta=4-4(6y-5)(4y-3) \geq 0$,

解得 $\frac{7}{12} \leq y \leq 1$, 故 $\frac{7}{12} \leq y \leq 1$ 且 $y \neq \frac{5}{6}$. 所以 $\frac{7}{12} \leq y \leq 1$,

因此最大值为 $y=1$, 由 $1=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}$ 解得 $k=1$.

解法 4: (特殊法) $y=\frac{5k^2+2k+3}{6k^2+4}=1-\frac{k^2-2k+1}{6k^2+4} \leq 1$, 当 $k=1$ 时取等号.

对于上述四种解法, 建议同学们着重掌握解法 2、解法 3, 尤其是解法 2, 具有可操作性, 易理解, 而解法 1 技巧性比较强, 属于“听得懂, 难操作”, 解法 4 “凑巧” 成份大.

例 3. 已知中心在原点 O , 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设不过原点 O 的直线 l 与该椭圆交于 P, Q 两点, 满足直线 OP, PQ, OQ 的斜率依次成等比数列, 求 $\triangle OPQ$ 面积的取值范围.

解析: (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 在老师苦口婆心的多次讲解下, 同学们应该都会这样做:

设直线 l 方程 $y=kx+m$ ($m \neq 0$), 通过联立椭圆方程消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,

判别式 $\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4) > 0$, 得 $1+4k^2 > m^2$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{4km^2-4}{1+4k^2}$, $|PQ| =$

$$\sqrt{1+k^2} |x_1-x_2| = \sqrt{1+k^2} \frac{4\sqrt{1+4k^2-m^2}}{1+4k^2}.$$

至此, 后面可能就会觉得无从下手, 其实, 我们只要根据斜率关系建立等式就能看到“曙光”.

$$\text{因为 } k^2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}, \text{ 而 } y_1y_2 = (kx_1+m)(kx_2+m) = k^2x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2 = \frac{m^2-4k^2}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } k^2 = \frac{m^2-4k^2}{4m^2-4}, \text{ 解得 } k^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{故 } |PQ| = \sqrt{10-5m^2}, \text{ 且原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10-5m^2} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{5}} = |m| \sqrt{2-m^2}.$$

到此, 如何求 $S_{\triangle OPQ}$ 面积的取值范围呢? 可以看成是关于 m^2 的一元二次问题: $S_{\triangle OPQ} = \sqrt{2m^2-m^4}$, 所以 $0 < S_{\triangle OPQ} \leq 1$.

这个答案还是有问题的! 因为前面在得到 $1+4k^2 > m^2, k^2 = \frac{1}{4}$ 、

$k^2 = \frac{m^2-4k^2}{4m^2-4}$ 后, 我们可以得到 $0 < m^2 < 2$ 且 $m^2 \neq 1$, 所以 $0 < S_{\triangle OPQ} \leq 1$.

例 4. 椭圆 T 的中心为坐标原点 O , 右焦点为 $F(2, 0)$, 且椭圆 T 过点 $E(2, \sqrt{2})$. $\triangle ABC$ 的三个顶点都在椭圆 T 上, 设三条边的中点分别为 M, N, P .

(1) 求椭圆 T 的方程;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三条边所在直线的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 且 $k_i \neq 0, i=1, 2, 3$. 若直线 OM, ON, OP 的斜率之和为 0, 求证: $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$ 为定值.

解析: (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 阅读完该问时, 同学们可能会觉得无从下手, 但若我们能想起本题的命题背景: 直线与椭圆相交, 则该直线斜率与相交线段中点与原点连线斜率之积为常数, 则该题的解决就容易了.

设斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两

点, 线段 AB 中点 M 与原点 O 的连线斜率为 k_1 , 则 $k \cdot k_1 = -\frac{b^2}{a^2}$.

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$\text{得 } \frac{x_2^2-x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2-y_1^2}{b^2} = 0, \text{ 则 } \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{y_2+y_1}{x_2+x_1} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 即 } k \cdot k_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

因此, 对于本题 $k_{OM} \cdot k_1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{k_1} = -2k_{OM}$,

同理可得 $\frac{1}{k_2} = -2k_{ON}, \frac{1}{k_3} = -2k_{OP}$, 所以 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = -2(k_{ON} + k_{OP} + k_{OM}) = 0$ 为常数.

实际上, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = -\frac{b^2}{a^2}(k_1' + k_2' + k_3'), \frac{1}{k_1'} + \frac{1}{k_2'} + \frac{1}{k_3'} = -\frac{b^2}{a^2}(k_1 + k_2 + k_3)$, 即只要其中某一类的斜率之和为常数, 则另一类的斜率倒数之和必也为常数, 并且不难发现还可以推广到有限情况和双曲线中.

综上所述, 希望通过本文四道圆锥曲线中斜率关系题的分析, 对同学们突破该类题型有所帮助.

(作者单位: 浙江绍兴县越崎中学)

责任编辑 徐国坚