2016年高考数学全国乙卷立体几何题探析

文/江门市培英高级中学　刘品德

2016年高考数学全国乙卷立体几何题设计理念新、图形构建新、问题立意新、设问方式新，注重基础，考查考生知识迁移和继续学习的能力.尽管试题新颖，但通过长方体的空间衬托，可以清晰地呈现所求问题的元素（点、线、面）间的位置关系，使问题图形直观化、条件结论明朗化，将问题化归为常规题，易于求解.

一、试题探析

本文结合2016年高考数学全国乙卷立体几何题，通过构造长方体的空间衬托，直观地呈现线面位置关系，从而得到创新解法.

例1（2016年高考数学全国乙卷，文18）如图1，已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形，$PA=6$，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连结 PE 并延长交 AB 于点 G.

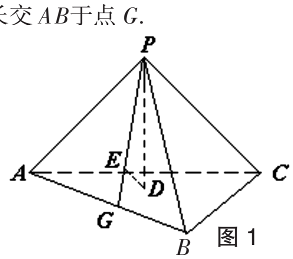

图1

（Ⅰ）证明：G 是 AB 的中点；

（Ⅱ）在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F（说明作法及理由），并求四面体 $PDEF$ 的体积.

分析：由正三棱锥的侧面是直角三角形联想到正方体的“一角”，将三棱锥“补成”一个正方体加以“衬托”，对正投影就有了更直观的认识，则问题就变得清晰了.

解析（Ⅰ）证明：∵顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，

∴$PD\perp$ 平面 ABC，而 $AB\subset$ 平面 ABC，

∴$PD\perp AB$，

同理 $DE\perp AB$，

又 $PD\cap DE=D$，$PD,DE\subset$ 平面 PDE，

∴$AB\perp$ 平面 PDE，故 $AB\perp PG$，

∵正三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB$，即 ΔPAB 是等腰直角三角形，

∴G 是 AB 的中点.

（Ⅱ）解：如图2，在正方体 $PBQC-AMNH$ 中，连结对角线 PN 交平面 ABC

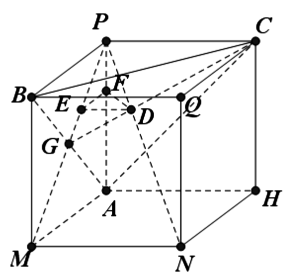

图2

于点 D，则 D 为 P 在平面 ABC 内的正投影，且 $PN=\sqrt{3}PA=6\sqrt{3}$，$PD=\frac{1}{3}PN=2\sqrt{3}$；过点 D 作 $DE\parallel CP$ 交平面 PAB 于点 E，则 E 为 D 在平面 PAB 内的正投影，且 $ED=\frac{1}{3}MN=2$；过点 E 作 $EF\parallel BP$ 交平面 PAC 于点 F，则 F 是点 E 在平面 PAC 内的正投影，$EF=\frac{1}{3}MA=2$.

由于 $EF\parallel BP$，且 $BP\perp$ 平面 PAC，则 $EF\perp$ 平面 PAC，于是 F 是点 E 在平面 PAC 内的正投影，

此时四面体 $PDEF$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta DEF}\cdot PF=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$.

同时，由题中“正投影”概念可联想到2009年广东高考理科数学第18题：如图3，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 E 是正方形 BCC_1B_1 的中心，点 F、G 分别是棱 C_1D_1，AA_1 的中点.设点 E_1，G_1 分别是

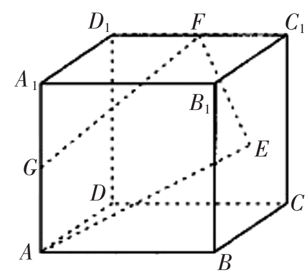

图3

点 E，G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影.（1）求以 E 为顶点，以四边形 $FGAE$ 在平面 DCC_1D_1 内的正投影为底面边界的棱锥的体积；（2）证明：直线 $FG_1\perp$ 平面 FEE_1；（3）求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值.试题以正方体为“依托”，但教师平时教学中很少讲“正投影”概念，不少考生对投影的本质认识不到位，导致当年理科考生的得分也不高.

例2（2016年高考数学全国乙卷，文、理11）平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，$\alpha\parallel$ 平面 CB_1D_1，$\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$，$\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$，则 m，n 所成角的正弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

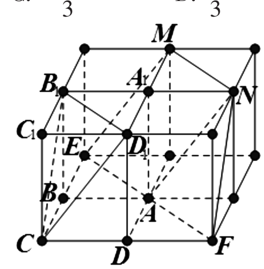

图4