

分析: 本题的原型是人教 A 版必修 2 第 58 页练习第 2 题. 如图 4, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 旁边补上三个一样的正方体得到一个大长方体, 易知平面 $MEFN$ 即是平面 α , 由图知平面 $MEFN \cap$ 平面 $ABCD = EF$, 平面 $MEFN \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AN$, 并且 $\triangle AFN$ 是正三角形, 则 AF 与 AN 所成的角为 60° , 正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 m, n 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

例 3 (2016 年高考数学全国乙卷, 理 18) 如图 5, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 面 $ABEF$ 为正方形, $AF=2FD$, $\angle AFD=90^\circ$, 且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60° .

- (I) 证明: 平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$;
(II) 求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.

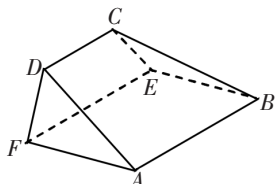


图 5

分析: 若习惯于只会建立坐标系后借助向量解决立体几何问题, 考生对这道题会感到无从着手而浪费了很多时间. 从评卷结果看, 不少考生误认为点 F (或 E) 处的三条棱两两垂直, 以此来建立空间直角坐标系而导致错误.

解法 1 (I) 由已知可得 $AF \perp FD$, $AF \perp FE$, 且 $FD \cap FE = F$, 则 $AF \perp$ 平面 $CDFE$, 而 $AF \subset$ 平面 $ABEF$, 所以平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$;

(II) 如图 6, 过 D 作 $DG \perp EF$, 垂足为 G ,

由 (I) 知 $DG \perp$ 平面 $ABEF$.

以 G 为原点, 以 $\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{GD}$ 方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $G-xyz$, 由 (I) 知 $\angle DFE$ 是

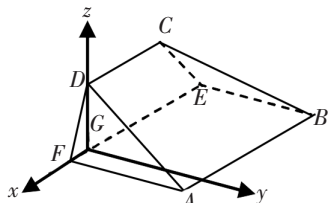


图 6

二面角 $D-AF-E$ 的平面角, 故 $\angle DFE = 60^\circ$, 设 $GF=1$, 则 $DF=2$, $DG=\sqrt{3}$, 于是 $A(1, 4, 0), B(-3, 4, 0), E(-3, 0, 0), D(0, 0, \sqrt{3})$,

由已知, $AB \parallel EF$, 所以 $AB \parallel$ 平面 $EFDC$, 又平面 $ABCD \cap$ 平面 $EFDC = CD$, 故 $AB \parallel CD, DC \parallel FE$,

由 $BE \parallel AF$, 可得 $BE \perp$ 平面 $EFDC$, 所以 $\angle CEF$ 为二面角 $C-BE-F$ 的平面角, 即 $\angle CEF = 60^\circ$, 则 $C(-2, 0, \sqrt{3})$.

$\therefore \overrightarrow{EC} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{EB} = (0, 4, 0), \overrightarrow{AC} = (-3, -4, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (-4, 0, 0)$.

设平面 BCE 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0, \\ 4y = 0. \end{cases}$

令 $x=3$, 则 $z=-\sqrt{3}, y=0$, 得 $\vec{n} = (3, 0, -\sqrt{3})$, 且 $|\vec{n}| = 2\sqrt{3}$;

设平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -3x_1 - 4y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ -4x_1 = 0. \end{cases}$

令 $y_1 = \sqrt{3}, x_1 = 0$, 则 $z_1 = -4$, 得 $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, -4)$, 且 $|\vec{m}| = \sqrt{19}$;

又 $\vec{m} \cdot \vec{n} = -4\sqrt{3}$, 则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角 θ 为 $\cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}} = -\frac{2\sqrt{19}}{19}$,

$\therefore$ 二面角 $E-BC-A$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

如果能够借助长方体, 即将几何体“嵌入”长方体中, 对于第二问即有如下解法:

解法 2 由 (I) 知, 将几何体“嵌入”长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 如图 7, 记

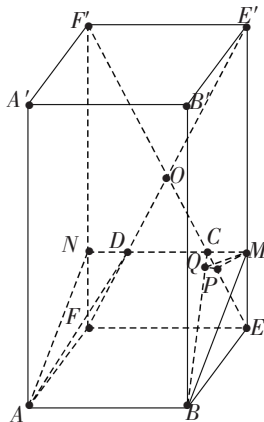


图 7

对角线 EF', FE' 相交于点 O , C, D 分别是 OE, OF 的中点, 平面 $ABCD$ 分别交 EE', FF' 于点 M, N , 易知 $\angle CEF = \angle DFE = 60^\circ$.

设 $AB=4$, 则 $CD=2, CM=DN=1, ME=NF=\sqrt{3}, CE=DF=2$,

过点 M 作 $MP \perp CE$ 于点 P , 过点 N 作 $PQ \perp BC$, 连结 MQ , 则 $MQ \perp BC$, 于是 $\angle MQP$ 是二面角 $E-BC-M$ 的平面角,

在 $Rt\triangle MEC$ 中, 易求 $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

在 $Rt\triangle MEB$ 中, 易求 $MB = \sqrt{19}$,

在 $Rt\triangle MBC$ 中, 易求 $MQ = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$,

在 $Rt\triangle MPQ$ 中, 易求 $PQ = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle MPQ$ 中, $\cos \angle MQP = \frac{PQ}{MQ}$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{19}}{19},$$

$\therefore$ 二面角 $E-BC-A$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

同时, 如果能够借助长方体, 建立坐标系就有了支撑, 而且各点的坐标也容易得到.