高考中的函数零点问题

文／潮州市湘桥区南春中学　陈雯钰

函数的零点是沟通函数、方程、图像的一个重要媒介，渗透着等价转化、化归、数形结合、函数与方程等思想方法，是一个考察学生综合素质的很好知识点.近几年的数学高考中频频出现零点问题，其形式逐渐多样化，但都离不开这几种常用的等价关系：函数 $y=f(x)$ 有零点⇔方程 $f(x)=0$ 有实数根⇔函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有交点.也可拓展为：函数 $y=F(x)=f(x)-g(x)$ 有零点⇔方程组 $\begin{cases}y_1=f(x)\\y_2=g(x)\end{cases}$ 有实数根⇔函数 $y_1=f(x)$ 与函数 $y_2=g(x)$ 的图像有交点.

围绕它们之间的关系，就高考中的一些典型题型加以剖析：

类型一：函数零点的分布

解决零点的分布问题，主要依据零点的存在性定理：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点.而零点的个数还需结合函数的图像和性质，尤其是函数的单调性才能确定.

例 1：(2013 高考数学重庆卷) 若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 两个零点分别位于区间（　　）

A. (a,b) 和 (b,c) 内

B. $(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

C. (b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内

D. $(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

解析：由题意 $a<b<c$，可得 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$，$f(b)=(b-c)(b-a)<0$，$f(c)=(c-a)(c-b)>0$.显然 $f(a)\cdot f(b)<0$，$f(b)\cdot f(c)<0$，所以该函数在 (a,b) 和 (b,c) 上均有零点，故选 A.

变式：（高考广东卷、高考山东卷）若函数为 $f(x)$ 为奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=-\lg(-x)+x+3$，已知 $f(x)=0$ 有一个根为 x_0，且 $x_0\in(n,n+1)$，$n\in N^*$，则 n 的值为________.

解析：由题意，设 $x>0$，则 $-x<0$，$f(-x)=-\lg x-x+3=-f(x)$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=\lg x+x-3$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$f(2)<0$，$f(3)>0$，所以 $x_0\in(2,3)$，则 $n=2$.

类型二：函数零点的个数

判断函数零点个数可利用定义法，即令 $f(x)=0$，则该方程的解即为函数的零点，方程解的个数就是函数零点的个数；也可根据几何法，将函数的零点问题转化为两个函数图像的交点问题来解决.

例 2：（2012 高考数学湖北卷）函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上的零点个数为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解析：定义法，令 $f(x)=0$，可得 $x=0$ 或 $\cos x^2=0$，所以得 $x=0$ 或 $x^2=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，又注意到 $x\in[0,4]$ 可得 $k=0,1,2,3,4$，所以方程共有 6 个解，因此函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上有 6 个零点，故选 C.

类型三：利用函数零点求参数

在高考中，除了要我们求函数的零点个数外，还常出现一种题型就是：先给出函数的零点个数，再来解决其他问题（如求参数）.要解决此类问题常根据函数 $y=F(x)=f(x)-g(x)$ 有零点⇔方程组 $\begin{cases}y_1=f(x)\\y_2=g(x)\end{cases}$ 有实数根⇔函数 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=g(x)$ 函数的图像有交点.

例 3：(2009 高考数学山东卷) 若函数 $f(x)=a^x-x-a$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 有两个零点，则实数 a 的取值范围是___.

解析：我们可将上述函数的零点转换成两个函数的图像的交点个数问题，根据例 3 的几何法：

1.构造函数.设函数 $y=a^x$ ($a>0$，且 $a\neq1$) 和函数 $y=x+a$,则函数 $f(x)=a^x-x-a$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 有两个零点，就是函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 与函数 $y=x+a$ 有两个交点.

2.通过图像描绘题意——将数转化成形.

3.由图像得出结论——将形转化成数.

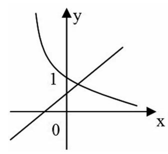

图 1

当时 $0<a<1$ (如图 1)，两函数只有一个交点,不符合；

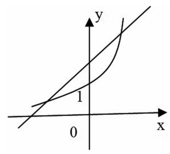

图 2

当时 $a>1$ (如图 2)，因为函数 $y=a^x$ ($a>1$) 的图像过点 $(0,1)$，而直线 $y=x+a$ 所过的点 $(0,a)$ 在点 $(0,1)$ 的上方，此时两函数有两个交点.所以实数 a 的取值范围是 $\{a|a>1\}$.

上述各例子剖析了近几年数学高考中函数零点问题的典型题型及解法，值得一提的是，各种类型各种方法并不是完全孤立的，利用数学的转化与化归、数形结合等思想，函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的零点问题看成方程根的个数或者函数图像 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 的交点个数问题，使得复杂的问题通过变换转化为简单的问题，难解的问题转化为易解的问题，未解决的问题转化为已解决的问题.

责任编辑　罗　峰