

数列是中学数学重要的基础内容之一,在平时的教学中要加强学生对概念的深入理解,如果从函数的角度去研究数列,加强函数思想在数列中的应用教学,使学生理解数列是函数概念的继续和延伸,它可以看作是以正整数集或它的有限子集为定义域的函数,数列与函数之间是特殊到一般的关系.通过对数列中的函数知识的应用,可以使学生对函数思想有更深刻的认识和理解,使所学的知识融会贯通,有效地提高学生的思维能力.

一、在等比数列中建立恰当的目标函数

在等比数列求和中,通过建立目标函数利用待定系数法使解题过程更加简便,同时避开了繁琐的计算过程.

例 1: 在等比数列中,前 n 项和为 S_n ,已知 $S_2=3, S_4=15$, 求 S_n .

思路分析: 本题的常规解法是用等比数列求和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

列出关于 a_1 和 q 的方程组,解出 a_1 和 q ,但计算繁琐.若考虑到等比

数列的前 n 项和 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} =$

$\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$, 设 $A = -\frac{a_1}{1-q}$, 则

可以考虑建立目标函数 $S_n = Aq^n - A$ (A 为待定系数),从而优化了解题过程.

解: 设 $S_n = Aq^n - A$, 则 $S_2 = Aq^2 - 2, \therefore Aq^2 - A = 3$ (1)

$S_4 = Aq^4 - A, \therefore Aq^4 - A = 15$ (2)

列方程组解 (1)(2) 得, $A=1, q=\pm 2$

$\therefore S_n = 2^n - 1$ 或 $S_n = (-2)^n - 1$

评述: 此题如果注意到等比数列前 n 项和 S_n 可写成 $S_n = Aq^n - A$ (A 为待定系数) 的形式,解题方法显得巧妙一些.通过对这道题的仔细讲解让学生理解函数思想在数列中的应用,在今后解数列题时要巧妙的使用函数方法.

函数的观点解决数列问题,不仅是解决数列问题的重要途径,也是提高数学解题能力的重要一环.用函数思想解数列问题时,不仅要用到函数的形式,更重要的是应用函数的思想方法通过构造函数,借助与函数性质及图像来解决问题,会有事半功倍的效果.

二、利用函数的性质解决等比数列问题

利用函数的单调性解决数列中的问题,会使得一道难题变得更简单.利用函数的一些性质解答数列题中同样如此.所以在解数列题时要思维活跃,多鼓励学生一题多解,不断的去探索数列与函数的异同点.

例 2: 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = (n+1) \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 试问该

数列 $\{a_n\}$ 有没有最大项? 若有求出最大项的项数, 若没有说明理由.

解题思路: 由于该数列不是直接与等比数列相关的数列,形式看起来比较复杂,但若从函数角度,可利用函数单调性来研究.

解: $a_{n+1} - a_n = (n+2)\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot \frac{9-n}{11}$

当 $n < 9$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 即 $a_{n+1} > a_n$

当 $n = 9$ 时, $a_{n+1} - a_n = 0$, 即 $a_{n+1} = a_n$

当 $n > 9$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$, 即 $a_{n+1} < a_n$

故 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9 = a_{10} > a_{11} > a_{12} > \dots$ 这说明数列 $\{a_n\}$ 中存在最大项, 为第 9 项或第 10 项.

评述: 本题也可以化归为解不

等式组 $\begin{cases} a_{n+1} > a_{n-1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases}$ 来解决, 但计算繁

琐, 而利用函数的单调性更能发现数列的变化趋势, 显得更简捷. 利用函数的相关性质来解决数列问题, 降低了试题的难度, 通过对这些题的研究, 让学生更加理解了函数与数列的特殊关系.

在解题中巧妙地使用函数思想会大大地降低解题难度, 尤其是在一些比较复杂的数列题中. 如果联想到了题目考查函数的某些性质, 那解题就是很容易的事, 经常让学生去探索它们的联系, 不仅提高了学生的解题速度, 更重要的是培养了学生的思维能力. 要告诉学生, 不能够为解题而解题, 要多去思考探究中学数学中各知识点之间的联系, 要挖掘各知识点之间的异同点, 达到对所学内容融会贯通真正的把所学的知识运用到实际生活中.

责任编辑 罗 峰