

重排数的若干关系式与限对排列

文/华南师范大学数学科学学院 杨艾欣

重排问题与限对排列问题是组合数学中一类重要的排列计数问题,这一系列看似毫无关联的的计数问题,实际上彼此间蕴含着微妙的关系,但目前关于这类问题的研究成果不多.再者,要深入研究这一系列的组合数通常需要借用其递推关系甚至彼此间的一些关系式,因此本文通过观察表格及定义式等方面寻找这些重要的关系式,为后续更深入的研究提供一定的基础.

一、定义与引理

首先给出这两个问题中的若干定义与引理:

引理 1.1 在 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,没有一个元排保位的排列个数为 D_n , 且 $D_n = n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}, n \geq 0$.

定义 1.2 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,形如 $(i, i+1)$, $i=1, 2, \dots, n-1$ 称为对子.

引理 1.1 $1, 2, \dots, n$ 在的排列中,没有对子的排列个数为 Q_n ,

且 $Q_n = (n-1)! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}, n \geq 1$.

定义 1.2 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,形如 $(i, i+1)$, $i=1, 2, \dots, n$ 称为圆

对子,约定 $(n, n+1) = (n, 1)$.

引理 1.3 在 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,没有圆对子的排列个数为 R_n ,

且 $R_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}, n \geq 1$.

定义 1.3 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,首尾两个元素相接,形成逆时针方向的一个排列称为圆排列.

引理 1.4 在 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,没有对子的圆排列个数为 $\dot{Q}_n$,

且 $\dot{Q}_n = (n-1)! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}, n \geq 1$.

引理 1.5 在 $1, 2, \dots, n$ 的排列中,没有圆对子的圆排列个数为 $\dot{R}_n$, 且

$\dot{R}_n = (-1)^n + n! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot (n-i), n \geq 1$.

二、 $D_n, Q_n, R_n, \dot{Q}_n, \dot{R}_n$ 之间的一些关系

笔者通过观察 $D_n, Q_n, R_n, \dot{Q}_n, \dot{R}_n$ 的特殊值(见下表),发现 $D_n, Q_n, R_n, \dot{Q}_n, \dot{R}_n$ 之间存在某些关系.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	...
Q_n	0	1	1	3	11	53	309	2119	16687	148329	...
$\dot{Q}_n$	0	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	...
R_n	0	1	0	3	8	45	264	1855	14832	133497	...
$\dot{R}_n$	1	0	0	1	1	8	36	229	1625	13208	...

发现的结论如下:

定理 2.1 D_n 与 Q_n 的关系:

$$Q_{n+1} = D_{n+1} + D_n \quad (1)$$

$$Q_{n+1} = (n+2)D_n + (-1)^{n+1} \quad (2)$$

$$D_{n+1} = nQ_n \quad (3)$$

证明: 根据 D_n 与 Q_n 的表示式知,

$$Q_{n+1} = n! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} (n+1-i) =$$

$$(n+1)! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} + n! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= (n+1)! \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i!} - (-1)^{n+1} +$$

$$n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} - (-1)^n$$

$$= D_{n+1} + D_n$$

(1) 式得证.

$$Q_{n+1} = n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} (n+1-i) =$$

$$(n+1)! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} + n! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= (n+1)! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} +$$

$$n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} - (-1)^n =$$

$$(n+2) \cdot n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} - (-1)^n$$

$$= (n+2)D_n + (-1)^{n+1}$$

(2) 式得证.

定理 2.2 D_n 与 R_n 的关系: $R_n = D_n - (-1)^n$ (4)

定理 2.3 D_n 与 $\dot{Q}_n$ 的关系: $D_n = \dot{Q}_{n+1}$ (5)

定理 2.4 D_n 与 $\dot{R}_n$ 的关系: $D_n = \dot{R}_n + \dot{R}_{n+1}$ (6)

定理 2.5 Q_n 与 R_n 的关系: $Q_{n+1} = R_n + R_{n+1}$ (7)

定理 2.6 Q_n 与 $\dot{Q}_n$ 的关系:

$$Q_n = \dot{Q}_n + \dot{Q}_{n+1} \quad (8)$$

定理 2.7 Q_n 与 $\dot{R}_n$ 的关系:

$$\dot{R}_{n+1} + \dot{R}_{n+2} = nQ_n \quad (9)$$