

中考存在性试题的思维探究

文/珠海市斗门区城南学校 李秀明

存在性探究题是指在一定的条件下,判断某种数学对象是否存在的问题,它有结论存在和结论不存在两种情形.解答这类问题,一般先假设所探究的对象已知存在,然后建立适当的数学模型(如函数、方程、不等式等),运用一定的数学思想方法(如数形结合、分类讨论等),通过计算或推理,如果探究出与条件相符合的结果,则说明假设成立,并由此得出问题的结论;否则就不存在.

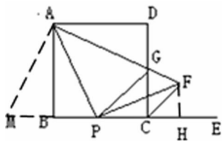
一、存在直线与抛物线只有一个点

例1:已知点A(-1, -1)在抛物线 $y = (k^2 - 1)x^2 - 2(k - 2)x + 1$ 上是. (1)求抛物线的对称轴; (2)若B点与A点关于抛物线的对称轴,问是否存在与抛物线只交于一点B的直线? 如果存在,求符合条件的直线; 如果不存在说明理由.

思路点拨: ①用待定系数法求抛物线的解析式; ②根据抛物线的对称轴公式求对称轴,或用配方法求对称轴; ③由对称轴的性质求出点A关于 $x = -\frac{5}{8}$ 的轴对称点B的坐标; ④求点的坐标转化为求过点B直线的解析式与抛物线的解析式组成方程组的解,但别忘了过B点平行于y轴的那条直线.

二、存在直线与直线平行(或垂直)

例2: (2009上海中考)如图,已知在正方形ABCD中,AB=2, P是边BC上的任意一点, E是边BC延长线上点, 连结AP. 过点P作PF⊥AP, 与∠DCE的平分线CF



相交于点F. 连结AF, 与边CD相交于点G, 连结PG. (1)求证: AP=FP; (2)⊙P、⊙G的半径分别是PB、GD, 试判断⊙P与⊙G两圆的位置关系, 并说明理由; (3)当BP取何值时, PG∥CF.

思路点拨: ①先证△ABP∽△PNF, 再证△ABP≌△PNF; ②作辅助线, 证△APM≌△APG; ③由平行线的性质及等腰直角三角形的性质, 由(2)的数量关系PG=BP+GD, 建立方程求解.

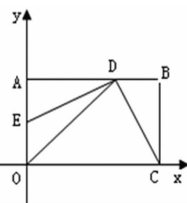
三、存在直线与圆相切

例3: (惠州市中考试题)已知: 如图(图略), 抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 的图像与x轴分别交于A、B两点, 与y轴交于C点, ⊙M经过原点O及A、C, 点D是劣弧OA上一动点(D点与A、O不重合). (1)求⊙M的面积; (2)连接CD交AO于点F, 延长CD至G, 使FG=2, 试探究当点D运动到何处时, 直线GA与⊙M相切, 并请说明理由.

思路点拨: ①求圆的面积关键是求圆的半径; ②由直线与圆相切的知识, 猜想点D是弧AO的中点, 由点D是弧AO的中点证明直线GA与⊙M相切.

四、存在特殊三角形(等腰三角形、等边三角形、直角三角形、等腰直角三角形)

例4: (2009重庆市中考)已知: 如图, 在平面直角坐标系xOy中, 矩形OABC的边OA在y轴的正半轴上, OC在x轴的正半轴上, OA=2, OC=3, 过原点



O作∠AOC的平分线交AB于点D, 连结DC, 过点D作DE⊥DC, 交OA于点E. (1)求过点E、D、C的抛物线的解析式; (2)将∠EDC绕点D按顺时针方向旋转后, 角的一边与y轴的正半轴交于点F, 另一边与线段OC交于点G. 如果DF与(1)中的抛物线交于另一点M, 点M的横坐标为 $\frac{6}{5}$, 那么EF=2OG是否成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, 请说明理由; (3)对于(2)中的点G, 在位于第一象限内的该抛物线上是否存在点Q, 使得直线GQ与AB的交点P与点C、G构成的△PCG是等腰三角形? 若存在, 请求出点Q的坐标; 若不存在, 请说明理由.

思路点拨: ①用待定系数法求抛物线的解析式, 这个解析式在第(2)、(3)题的计算中要用到; ②过点M作MN⊥AB, 根据对应线段成比例可以求FA的长; ③将∠EDC绕点D旋转的过程中, △DCG与△DEF保持全等; ④第(3)题反客为主, 分三种情况讨论△PCG为等腰三角形, 根据点P的位置确定点Q的位置, 再计算点Q的坐标.

五、存在特殊四边形(平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形)

例5: (2011广东中考)如图, 抛物线 $y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{17}{4}x + 1$ 与y轴交于A点, 过点A的直线与抛物线交于另一点B, 过点B作BC⊥x轴, 垂足为点C(3, 0). (1)求直线AB的函数关系式; (2)动点P

