例谈分类与整合思想的应用

文/兴宁市坭陂中学 伍利美

分类与整合思想的考查在高考中占有比较重要的位置，通常以解答题为主进行考查.为什么要分类？如何分类？如何整合？这就要求学生必须有严谨、周密的逻辑思维能力和一定的分析问题、解决问题的能力.

一、对含有参数的字母进行分类与整合

例 1：已知 $a\in R$，求 $f(x)=x^2e^{ax}$ 的单调区间.

解： 函数 $f(x)$ 的导数：$f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(2x+ax^2)e^{ax}$；

（1）当 $a=0$ 时，若 $x<0$，则 $f'(x)<0$；若 $x>0$，则 $f'(x)>0$.

所以当 $a=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数，在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数.

（2）当 $a>0$ 时，由 $2x+ax^2>0$，解得 $x<-\frac{2}{a}$ 或 $x>0$，

由 $2x+ax^2<0$，解得 $-\frac{2}{a}<x<0$.

所以，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{2}{a})$ 内为增函数，在区间 $(-\frac{2}{a},0)$ 内为减函数，在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数；

（3）当 $a<0$ 时，由 $2x+ax^2>0$，解得 $0<x<-\frac{2}{a}$，由 $2x+ax^2<0$，解得 $x<0$ 或 $x>-\frac{2}{a}$.

所以，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数，在区间 $(0,-\frac{2}{a})$ 内为增函数，在区间 $(-\frac{2}{a},+\infty)$ 内为减函数.

评注： 数学问题中含有变量或参数，这些变量或参数取不同的值时会导致不同的结果，故需要对参数进行分类讨论，再适当进行整合.

二、对排列、组合、概率问题中各种可能出现的结果进行分类与整合

例 2：盒子有大小相同的球 10 个，其中标号为 1 的球 3 个，标号为 2 的球 4 个，标号为 5 的球 3 个，第一次从盒子中任取 1 个球，放回后第二次再任取 1 个球（假设取到每个球的可能性都相同），记第一次与第二次取到球的标号之和为 ξ，求 ξ 的分布列.

解： 记 ξ=k 为所取两球标号之和，则 k=2，3，4，6，7，10.

$P(\xi=2)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$；

$P(\xi=3)=2\times\frac{3}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{24}{100}$；

$P(\xi=4)=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{16}{100}$；

$P(\xi=6)=2\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{18}{100}$；

$P(\xi=7)=2\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{24}{100}$；

$P(\xi=10)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$.

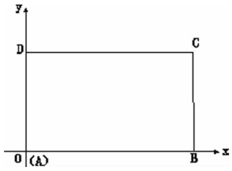
∴ξ 的分布列为

ξ	2	3	4	6	7	10
p	$\frac{9}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{9}{100}$

评注： 排列、组合、概率问题是考查分类与整合思想的重要载体，应使学生学会如何分步研究解决或分类研究解决，然后再由它们整合出所要求的结果.

三、对几何问题中元素的形状、位置变化情况进行分类整合

例 3：在平面直角坐标系中，已知矩形 ABCD 的边长为 2，宽为 1、AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，A 点与坐标原点重合（如图所示），将矩形折叠，使 A 点落在线段 DC 上.（Ⅰ）若折痕所在直线的斜率为 k，试写出折痕所在直线的方程；（Ⅱ）求折痕的长的最大值.



解：（1）当 $k=0$ 时，此时 A 点与 D 点重合，折痕所在的直线方程 $y=\frac{1}{2}$；

（2）当 $k\neq0$ 时，将矩形折叠后 A 点落在线段 CD 上的点为 G $(a,1)$，所以 A 与 G 关于折痕所在的直线对称，有 $k_{OG}k=-1$，$\frac{1}{a}k=-1\Rightarrow a=-k$；故 G 点坐标为 G $(-k,1)$，从而折痕所在的直线与 OG 的交点坐标（线段 OG 的中点）为 M $(-\frac{k}{2},\frac{1}{2})$，折痕所在的直线方程 $y-\frac{1}{2}=k(x+\frac{k}{2})$，即 $y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）（1）当 $k=0$ 时，折痕的长为 2.

（2）当 $k\neq0$ 时，折痕所在的直线与坐标轴的交点坐标为 N $(0,\frac{k^2+1}{2})$，P $(-\frac{k^2+1}{2k},0)$，设 PN=d，

$$d=PN^2=(\frac{k^2+1}{2})^2+(-\frac{k^2+1}{2k})^2=\frac{(k^2+1)^3}{4k^2}$$

$$d'=\frac{3(k^2+1)^2\cdot2k\cdot4k^2-(k^2+1)^3\cdot8k}{16k^4}$$

令 $d'=0$，解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore PN^2_{max}=\frac{27}{16}$，$PN_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}<2$

由折痕可知 $k<0$，所以折痕的长度的最大值 2.

评注： 涉及各种图形元素的位置关系时应考虑周密，不重不漏.

在重视分类与整合思想的应用时，也应防止见凡参数就讨论的轻率做法，能整体解决的就不必分类讨论，辩证地运用分类与整合来解题.

责任编辑 罗 峰