

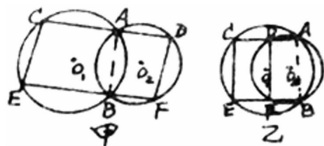
穷举归纳和比较在初中数学中的运用

文/饶平县联饶中学 杨惜君

穷举归纳法是指证明一个命题时,根据提示考虑到一切可能的情形,然后分别各种情形逐一进行推理论证,若都能导出命题结论的正确性,则可归纳得出命题的正确性。这种证法,只适应于特殊情形不多的命题。

例:已知: $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A, B, 经过点 A 的直线分别交两圆于点 C 和 D, 经过点 B 的直线分别交两圆于点 E 和 F, 且 $CD \parallel EF$ 。求证: (1) $CD=EF$; (2) $CE=DF$ 。

证明: 本题的图形有两种情况(如图)。



(1) CE, DF 分居公共弦 AB 两侧 (图甲), 连结 AB, 则 $\angle ABF = \angle C$, $\therefore$ 四边形 ABFD 内接于 $\odot O_2$, $\therefore \angle ABF + \angle D = 180^\circ$, $\therefore CE \parallel DF$, 又 $CD \parallel EF$, $\therefore$ 四边形 CEFD 是平行四边形。故 $CD=EF$, $CE=DF$ 。

(2) CE, DF 在公共弦 AB 的同侧 (图乙), 连结 AB, 则 $\angle CDF = \angle B$, $\therefore$ 四边形 CEBA 内接于 $\odot O_1$, $\therefore \angle C + \angle B = 180^\circ$, $\therefore CE \parallel EF$, $\therefore$ 四边形 CEFD 是平行四边形。故 $CD=EF$, $CE=DF$ 。

在采用穷举归纳法证明几何题中,有时还会发现一些被认为是正确的命题的错误,从而否定这些似真而假的几何命题。

比较法就是找出一事物区别于其他事物的特点,通过对比可以找出差异,有助于进一步加深对新知识的

理解,揭示新知识的本质。

在数学教学中恰当地运用比较法,不但能突出教学的重点,简化某些教学环节,而且有助于学生理解和掌握概念,提高解题能力和发展思维能力,可以使学生对解题思路更清晰更准确,既可巩固基础知识又提高能力。

例:一个容器盛满纯药液 63 升,第一次倒出一部分药液后,用水加满;第二次又倒出同样多的药液,再用水加满,这时,容器内剩下的纯药液是 28 升,每次倒出液体多少升?

这类题目,不仅在工农业生产中经常碰到,而且在学习高中的等比数列、指数方程等内容时,也要碰到。它是分数、百分数问题的实际应用,解题时,要用到“已知个数的百分之几,求这个数”的方法,而且又涉及到化学中“溶液”、“溶质”、“浓度”的概念及其三者之间的关系。

在解决这类问题前,应该要求学生理解“溶液”(溶剂和溶质的和)、“溶质”、“浓度”三者的概念和它们之间的关系(浓度=溶质/溶液)及其变化时的关系:1.若溶液增加溶剂(如水),则溶液和浓度变化,而所含溶质的量不变。2.若将溶液倒出,则溶液中所含溶质的量发生变化,但是浓度不变。

解法一:利用每次倒出纯药液的多少列式。设每次倒出液体 x 升,则第一次倒出 x 升都是纯药液,用水加满后,这时容器中剩下的纯药液为 $(63-x)$ 升,占整个溶液 63 升的 $(63-x)/63$ (即浓度);第二次倒出 x 升的药液中有纯药液 $(63-x)x/63$ 升,由此可得方程:

$$63-x-(63-x)x/63=28。$$

这种列式方法,学生最容易接受和理解,但是式子太繁琐,而且与以后学习的等比数列,指数方程应用题列式形式与解题的途径不一致,所以不是最佳方法。

解法二:用浓度与溶质的变化列式。设每次倒出 x 升液体,第一次倒出 x 升纯药液后,用水加满,此时,容器内的浓度为 $(63-x)/63$,第二次倒出 x 升溶液后,在剩下的 $(63-x)$ 升溶液中,有纯药液 $(63-x) \cdot (63-x)/63$ 升,由此可得方程 $(63-x)^2/63=28$ 。

这种列式方法,虽然比较简单,但与以后的学习无多大联系,所以也不是最好方法。

解法三:设每次倒出 x 升液体,则第一次倒出 x 升纯药液后,容器内还剩下纯药液 $63-x=63(1-x/63)$ 升,用水加满后,容器内溶质(纯药液)不变,而浓度变成了 $63(1-x/63)/63=1-x/63$,所以在第二次倒出 x 升溶液中有纯药液 $(1-x/63) \cdot x$,这时容器内剩下的纯药液有 $63(1-x/63)-(1-x/63)x=(1-x/63) \cdot (63-x)=63(1-x/63)^2$,依题意可得 $63(1-x/63)^2=28$ 。

这种方法列的方程比较简明易懂,它既联系了例题的分析过程和列式的方法,且与以后等比数列,指数方程等应用题的解题形式和思考方法有联系,所以采取这一列式方法是最佳的。

在实践中证明,这种比较法的数学方法,学生掌握的知识扎实,理解也较好。当然,比较法只能用来帮助我们建立猜想,作为研究问题的线索。

责任编辑 罗峰