

圆锥曲线的切线

文 / 开平市开侨中学 张和平

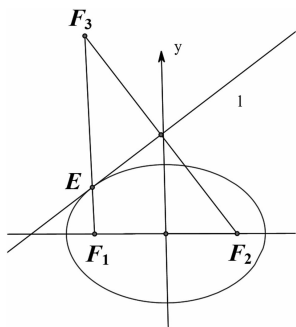


图 1

F_2F_3 的垂直平分线 l , 则 l 为所求.

2. 过椭圆外一点作椭圆的切线.

如图 2, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 求作过椭圆外一点 M 和椭圆相切的直线.

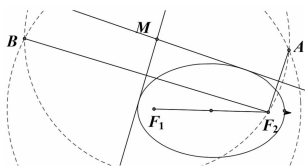


图 2

的直线.

作法: 以点 M 为圆心, MF_2 长为半径作 $\odot M$, 再以 F_1 为圆心, $2a$ 长为半径作 $\odot F_1$, 两圆相交于点 A, B , 连接 AF_2, BF_2 , 过点 M 分别作 AF_2, BF_2 的垂线, 两垂线就是所求的切线 (证明略). 想说明一下的是, 山东实验中学的宋文革老师曾在文 (1) 中介绍过切线的作法, 但他的作法是先求出切线的方程, 把方程化为截距式后, 利用比例作出截距, 再得切线, 作法较繁琐, 而且还有错把方程 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 当作过双曲线外一点和双曲线相切的直线方程的嫌疑.

双曲线和抛物线的切线都有类似的做法, 此处不再赘述.

三、切线的性质

类似于圆的切线, 有心圆锥曲线 (椭圆和双曲线) 也有一些类似

于圆的性质.

性质 1: 有心圆锥曲线的切线及过切点的直径斜率存在时, 则切线和过切点的直径所在直线的斜率之积为定值 (对应于圆中: 切线垂直于过切点的半径).

性质 2: 过有心圆锥曲线外一点 P 作曲线的切线 PA, PB (A, B 为切点), 则直线 PO (O 为坐标原点) 平分线段 AB .

性质 3: ①已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过椭圆 C_1 外一点 P 作椭圆的切线 PA, PB (A, B 为切点), 则 $\angle PF_1A = \angle PF_1B$ 且 $\angle PF_2A = \angle PF_2B$.

②已知双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过双曲线 C_2 外一点 P 作双曲线的切线 PA, PB (A, B 为切点), 当点 P

在区域 $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} < 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 内时, $\angle PF_1A =$

$\angle PF_2B$; 当点 P 在区域 $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} < 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

内时, $\angle PF_1A + \angle PF_2B = 180^\circ$.

由于圆锥曲线有自己特有的准线和焦点为, 所以它们还有一些圆所没有的性质, 现给出其中的两条典型性质:

性质 4: 过准线上一点作圆锥曲线的切线, 则切点弦过焦点.

性质 5: 过圆锥曲线焦点弦两端点的切线必相交且交点在准线.

限于篇幅, 本文不再给出以上性质的证明.

责任编辑 罗 峰

直线和圆锥曲线的位置关系中, 相切是一种特殊而重要的关系, 在各种级别的考题中, 也常常出现切线的身影, 而且圆锥曲线本身就是其切线族的“包络”, 但课本对切线的描述却十分吝啬, 因此笔者从定义、作法、性质等方面对圆锥曲线的切线进行了一些探究, 现把探究的结果整理成文, 望同行们指正.

一、圆锥曲线切线的定义

设 $P(x_0, y_0)$ 是圆锥曲线 C 上一定点, $P(x_n, y_n)$ 是该曲线的动点, 当点 P_n 趋近于点 P 时, 割线 PP_n 趋近于确定的位置, 这个确定位置的直线 PT 称为曲线 C 在 P 处的切线.

二、圆锥曲线切线的作法

下面以椭圆为例, 介绍切线的尺规作法.

1. 过椭圆上一点作椭圆的切线.

如图 1, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 求作过椭圆上一点 $E(x_0, y_0)$ 和椭圆相切的直线.

作法: 连 F_1E , 延长 F_1E 到点 F_3 , 使 $EF_1 = EF_2$, 连 F_2F_3 , 过 E 作